Στο παρακάτω σχήμα, να βρείτε πόσα διαφορετικά τετράγωνα σχηματίζονται.



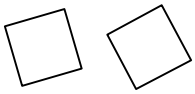
ΛΥΣΗ

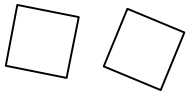
Εάν x ο αριθμός των τελειών που υπάρχουν σε κάθε σειρά τετραγώνου του σχήματος (εδώ x=5), τότε ο αριθμός των τετραγώνων που σχηματίζονται S, δίνεται από τον τύπο:

$$S = \sum_{\nu=1}^{x}(x - \nu)^2 + \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{x}{2}\right]}(x - 2\nu)^2 + 2\cdot\sum_{\nu=3}^{x}(x - \nu)^2,\ \nu \in \mathbb{N},$$

Όπου $\sum_{i=1}^{x}(x-\nu)^2$ ο αριθμός όλων των τετραγώνων που υπάρχουν χωρίς περιστροφή, δηλαδή όλων των τετραγώνων που είναι της μορφής 

$\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{x}{2}\right]}(x-2\nu)^2$ ο αριθμός των τετραγώνων που έχουν περιστροφή 45°, δηλαδή είναι της μορφής 

Και $2\cdot\sum_{\nu=3}^{x}(x-\nu)^2$ ο αριθμός των τετραγώνων που περιστροφή λιγότερο από 45°, δηλαδή είναι της μορφής 

Το άθροισμα αυτό είναι επί 2, γιατί όσα τετράγωνα σχηματίζονται που έχουν περιστροφή μικρότερη των 45°, τόσα τετράγωνα θα σχηματίζονται που θα έχουν περιστροφή μεγαλύτερη των 45°: 

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι ισχύει ο τύπος για x σημεία (τα οποία αποτελούν την πλευρά του σχήματος), και $S_1 = \sum_{\nu=1}^{x}(x - \nu)^2 + \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{x}{2}\right]}(x - 2\nu)^2 + 2\cdot\sum_{\nu=3}^{x}(x - \nu)^2,\ \nu \in \mathbb{N}$.

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για (x+1) σημεία.

Με κάθε νέα σειρά, σχηματίζονται



$(x+1-1)+(x+1-2)+(x+1-3)+\ldots+(2)+(1)$ τετράγω να χωρίς περιστροφή σε κάθε σειρά. Άρα θα έχουμε $2\cdot\left[(x+1-1)+(x+1-2)+(x+1-3)+\ldots+(2)+(1)\right]-1$ στο σχήμα συνολικά (επί 2 γιατί όσα νέα σχηματίζονται στην πρώτη σειρά, σχηματίζονται και στην τελευταία στήλη, και -1, γιατί το γωνιακό το μετράμε δυο φορές).

Δηλαδή σχηματίζονται $\sum_{\nu=1}^{x+1}\left[2\cdot(x+1-\nu)-1\right]$ νέα τετράγωνα χωρίς περιστροφή.

Σχηματίζονται:

αν x άρτιος: $(x+1-2)+(x+1-4)+\ldots+(x+1-x+2)+(x+1-x)$ και

αν x περιττός: $(x+1-2)+(x+1-4)+\ldots+(x+1-x-1+2)+(x+1-x-1)$

τετράγωνα με περιστροφή 45° στην πρώτη σειρά, και επειδή σχηματίζονται άλλα τόσα στην τελευταία στήλη, συνολικά θα σχηματίζονται

$\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{2x+1}{4}\right]}\left[2\cdot(x+1-2\nu)-1\right],\ \left(2x+2-4\nu\ge 1\Leftrightarrow \nu\le\frac{2x+1}{4}\right)$

και $(x+1-3)+(x+1-4)+(x+1-5)+\ldots+(2)+(1)$ τετράγωνα με περιστροφή μικρότερη των 45°, δηλαδή $\sum_{\nu=3}^{x}\left[2(x+1-\nu)-1\right]$ συνολικά με περιστροφή μικρότερη τω 45°. Επειδή όμως υπάρχουν και άλλα τόσα με περιστροφή μεγαλύτερη των 45°, τα συνολικά τετράγωνα με περιστροφή (διάφορη των 0° ή 45°) θα είναι

$2\cdot\sum_{\nu=3}^{x}\left[2(x+1-\nu)-1\right]$.

Από τα x σημεία υπάρχουν $S_1=\underbrace{\sum_{\nu=1}^{x}(x-\nu)^2}_{Y_1}+\underbrace{\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{x}{2}\right]}(x-2\nu)^2}_{Y_2}+\underbrace{2\cdot\sum_{\nu=3}^{x}(x-\nu)^2}_{Y_3},\ \nu\in\mathbb{N}$

Από την προσθήκη των δύο νέων σειρών σημείων, προκύπτουν

$S_2=\underbrace{\sum_{\nu=1}^{x}\left[2\cdot(x+1-\nu)-1\right]}_{Z_1}+\underbrace{\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{2x+1}{4}\right]}\left[2\cdot(x+1-2\nu)-1\right]}_{Z_2}+\underbrace{2\cdot\sum_{\nu=3}^{x}\left[2(x+1-\nu)-1\right]}_{Z_3},\ \nu\in\mathbb{N}$

Σύμφωνα με τον γενικό τύπο, για (x+1) σημεία, ισχύει ότι:

$S_3=\underbrace{\sum_{\nu=1}^{x+1}(x+1-\nu)^2}_{X_1}+\underbrace{\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{x+1}{2}\right]}(x+1-2\nu)^2}_{X_2}+\underbrace{2\cdot\sum_{\nu=3}^{x+1}(x+1-\nu)^2}_{X_3},\ \nu\in\mathbb{N}$.

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $\underline{S_1+S_2=S_3}$

$Y_1 \rightarrow \sum_{\nu=1}^{x}(x-\nu)^2 = (x-1)^2 + (x-2)^2 + \ldots + 1^2 + 0 \Leftrightarrow$

$Y_1 = (x-1)^2 + (x-2)^2 + \ldots + 1^2 + 0 \quad (1)$

$Z_1 \rightarrow \sum_{\nu=1}^{x}\left[2\cdot(x+1-\nu)-1\right] = \sum_{\nu=1}^{x}(2x+2-2\nu-1) = \sum_{\nu=1}^{x}(2x-2\nu+1) \Leftrightarrow$

$Z_1 = (2x-2+1) + (2x-4+1) + \ldots + (2x-2x+2+1) + (2x-2x+1) \Leftrightarrow$

$Z_1 = x\cdot 2x + x\cdot 1 - 2\left(1+2+\ldots+(x-1)+(x)\right) \Leftrightarrow$

$Z_1 = 2x^2 + x - 2\left(x\cdot\frac{x+1}{2}\right) \Leftrightarrow$

$Z_1 = 2x^2 + x - x^2 - x \Leftrightarrow$

$Z_1 = x^2 \quad (2)$

$X_1 \rightarrow \sum_{\nu=1}^{x+1}(x+1-\nu)^2 = (x+1-1)^2 + (x+1-2)^2 + \ldots + (1)^2 + 0 \Leftrightarrow$

$X_1 = x^2 + (x-1)^2 + (x-2)^2 + \ldots + 1^2 + 0 \quad (3)$

Από (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $\boxed{X_1 = Z_1 + Y_1 \ (4)}$

<u>Αν x άρτιος,</u> $\left[\frac{x}{2}\right] = \frac{x}{2}$

$Y_2 \rightarrow \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{x}{2}\right]}(x-2\nu)^2 = (x-2)^2 + (x-4)^2 + \ldots + (x-x+2)^2 + (x-x)^2 \Leftrightarrow$

$Y_2 = (x^2-4x+4) + (x^2-8x+16)^2 + \ldots + 4 + 0 \quad \left(\frac{x}{2}\text{ όροι}\right) \quad (5)$

-- $\left[\frac{x+1}{2}\right] = \frac{x}{2}$ --

$X_2 \rightarrow \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{x+1}{2}\right]}(x+1-2\nu)^2 = (x+1-2)^2 + (x+1-4)^2 + \ldots + \left(x+1-2\frac{x-2}{2}\right)^2 + \left(x+1-2\frac{x}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$

$X_2 = (x-1)^2 + (x-3)^2 + \ldots + (x+1-x+2)^2 + (x-x+1)^2 \Leftrightarrow$

$X_2 = (x^2-2x+1) + (x^2-6x+9) + \ldots + 9 + 1 \quad \left(\frac{x}{2}\text{ όροι}\right) \quad (6)$

Από (5) και (6) προκύπτει ότι

$X_2 - Y_2 = (x^2-2x+1) - (x^2-4x+4) + (x^2-6x+9) - (x^2-8x+16) + \ldots + (9-4) + (1-0) \Leftrightarrow$

$X_2 - Y_2 = (x^2-x^2-2x+4x+1-4) + (x^2-x^2-6x+8x+9-16) + \ldots + 5 + 1 \Leftrightarrow$

$X_2 - Y_2 = (2x-3) + (2x-7) + \ldots + 5 + 1 \quad \left(\frac{x}{2}\text{ όροι}\right) \quad (7)$

$\left[\frac{2x+1}{4}\right] = \frac{x}{2}$

$Z_2 \rightarrow$ $\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{2x+1}{4}\right]}\left[2\cdot\left(x+1-2\nu\right)-1\right]=\sum_{\nu=1}^{\frac{x}{2}}\left(2x-4\nu+1\right) \Leftrightarrow$

$$Z_2=\left(2x-4+1\right)+\left(2x-8+1\right)+\ldots+\left(2x-2x+4+1\right)+\left(2x-2x+1\right) \Leftrightarrow$$

$$Z_2=\left(2x-3\right)+\left(2x-7\right)+\ldots+5+1 \quad \left(\frac{x}{2}\text{ όροι}\right) \quad (8)$$

Από (7) και (8) προκύπτει ότι: $X_2-Y_2=Z_2 \Leftrightarrow$

$$\boxed{X_2=Y_2+Z_2 \quad (9)}$$

<u>Αν x περιττός,</u> $\left[\frac{x}{2}\right]=\frac{x-1}{2}$, $\left[\frac{x+1}{2}\right]=\frac{x+1}{2}$, $\left[\frac{2x+1}{4}\right]=\frac{x-1}{2}$

$X_2 \rightarrow$

$$\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{x+1}{2}\right]}\left(x+1-2\nu\right)^2=\left(x+1-2\right)^2+\left(x+1-4\right)^2+\ldots+\left(x+1-2\frac{x+1-2}{2}\right)^2+\left(x+1-2\frac{x+1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$X_2=\left(x-1\right)^2+\left(x-3\right)^2+\ldots+\left(x+1-x-1+2\right)^2+\left(x-x+1-1\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$X_2=\left(x^2-2x+1\right)+\left(x^2-6x+9\right)+\ldots+4+0 \quad \left(\frac{x+1}{2}\text{ όροι}\right) \Leftrightarrow$$

$$X_2=\left(x^2-2x+1\right)+\left(x^2-6x+9\right)+\ldots+16+4 \quad \left(\frac{x-1}{2}\text{ όροι}\right) \quad (10)$$

$Y_2 \rightarrow$ $\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{x}{2}\right]}\left(x-2\nu\right)^2=\sum_{\nu=1}^{\frac{x-1}{2}}\left(x-2\nu\right)^2=\left(x-2\right)^2+\left(x-4\right)^2+\ldots+\left(x-x+1+2\right)^2+\left(x-x+1\right)^2 \Leftrightarrow$

$$Y_2=\left(x^2-4x+4\right)+\left(x^2-8x+16\right)^2+\ldots+9+1 \quad \left(\frac{x-1}{2}\text{ όροι}\right) \quad (11)$$

Από (10) και (11) προκύπτει ότι:

$$X_2-Y_2=\left(x^2-2x+1\right)-\left(x^2-4x+4\right)+\left(x^2-6x+9\right)-\left(x^2-8x+16\right)+\ldots+\left(16-9\right)+\left(4-1\right) \Leftrightarrow$$

$$X_2-Y_2=\left(x^2-x^2-2x+4x+1-4\right)+\left(x^2-x^2-6x+8x+9-16\right)+\ldots+7+3 \Leftrightarrow$$

$$X_2-Y_2=\left(2x-3\right)+\left(2x-7\right)+\ldots+7+3 \quad \left(\frac{x-1}{2}\text{ όροι}\right) \quad (12)$$

$Z_2 \rightarrow$ $\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{2x+1}{4}\right]}\left[2\cdot\left(x+1-2\nu\right)-1\right]=\sum_{\nu=1}^{\frac{x-1}{2}}\left(2x-4\nu+1\right) \Leftrightarrow$

$$Z_2=\left(2x-4+1\right)+\left(2x-8+1\right)+\ldots+\left(2x-2x+2+4+1\right)+\left(2x-2x+2+1\right) \Leftrightarrow$$

$$Z_2=\left(2x-3\right)+\left(2x-7\right)+\ldots+7+3 \quad \left(\frac{x-1}{2}\text{ όροι}\right) \quad (13)$$

Από (12) και (13) προκύπτει ότι: $X_2-Y_2=Z_2 \Leftrightarrow$

$$\boxed{X_2=Y_2+Z_2 \quad (14)}$$

Από (9) και (14) προκύπτει ότι $\boxed{X_2 = Y_2 + Z_2 \ (15)}$

$X_3 \rightarrow \sum_{\nu=3}^{x+1}(x+1-\nu)^2 = (x+1-3)^2 + (x+1-4)^2 + \ldots + (x+1-x-1+1)^2 + (x+1-x-1)^2 \Leftrightarrow$

$X_3 = (x-2)^2 + (x-3)^2 + \ldots + 1^2 + 0 \ (x-1 \text{ όροι}) \Leftrightarrow$

$X_3 = (x-2)^2 + (x-3)^2 + \ldots + 4 + 1 + 0 \ (x-1 \text{ όροι}) \ (16)$

$Y_3 \rightarrow \sum_{\nu=3}^{x}(x-\nu)^2 = (x-3)^2 + (x-4)^2 + \ldots + (x-x+1)^2 + (x-x)^2 \Leftrightarrow$

$Y_3 = (x-3)^2 + (x-4)^2 + \ldots + (1)^2 + (0)^2 \Leftrightarrow$

$Y_3 = (x-3)^2 + (x-4)^2 + \ldots + 4 + 1 + 0 \ (x-2 \text{ όροι}) \ (17)$

$Z_3 \rightarrow \sum_{\nu=3}^{x}[2(x+1-\nu)-1] = \sum_{\nu=3}^{x}(2x+2-2\nu-1) = \sum_{\nu=3}^{x}(2x+1-2\nu) \Leftrightarrow$

$Z_3 = (2x+1-6) + (2x+1-8) + \ldots + (2x+1-2x+2) + (2x+1-2x) \Leftrightarrow$

$Z_3 = (2x-5) + (2x-7) + \ldots + (2x-(2x-3)) + (2x-(2x-1)) \ (x-2 \text{ όροι}) \Leftrightarrow$

$Z_3 = 2x(x-2) - (5+7+9+\ldots+(2x-3)+(2x-1)) \Leftrightarrow$

$Z_3 = 2x^2 - 4x - \left(\frac{2x-1+5}{2}\right)(x-2) \Leftrightarrow$

$Z_3 = 2x^2 - 4x - (x+2)(x-2) \Leftrightarrow$

$Z_3 = 2x^2 - 4x - (x^2 - 4) \Leftrightarrow$

$Z_3 = 2x^2 - 4x - x^2 + 4 \Leftrightarrow$

$Z_3 = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow$

$Z_3 = (x-2)^2 \ (18)$

Από (17) και (18):

$Y_3 + Z_3 = (x-1)^2 + (x-2)^2 + \ldots + 4 + 1 + 0 + (x-2)^2 \ (x-2+1 \text{ όροι}) \Leftrightarrow$

$Y_3 + Z_3 = (x-2)^2 + (x-3)^2 + (x-4)^2 + \ldots + 4 + 1 + 0 + (x-1 \text{ όροι}) \text{ και από (16)} \Leftrightarrow$

$Y_3 + Z_3 = X_3 \Leftrightarrow$

$\boxed{X_3 = Y_3 + Z_3 \ (19)}$

Από (4), (15) και (19) έχουμε ότι: $X_1 + X_2 + X_3 = Y_1 + Z_1 + Y_2 + Z_2 + Y_3 + Z_3 \Leftrightarrow$

$X_1 + X_2 + X_3 = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Z_1 + Z_2 + Z_3 \Leftrightarrow$

$\boxed{S_3 = S_1 + S_2}$

ό.έ.δ.

Αφού $S=\sum_{\nu=1}^{x}(x-\nu)^2+\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{x}{2}\right]}(x-2\nu)^2+2\cdot\sum_{\nu=3}^{x}(x-\nu)^2,\ \nu\in\mathbb{N}$ για $x\geq 3$, ο τύπος μπορεί να παραγοντοποιηθεί:

$$S=\sum_{\nu=1}^{x}(x-\nu)^2+\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{x}{2}\right]}(x-2\nu)^2+2\cdot\sum_{\nu=3}^{x}(x-\nu)^2=(x-1)^2+2\cdot(x-2)^2+\sum_{\nu=2}^{\left[\frac{x}{2}\right]}(x-2\nu)^2+3\cdot\sum_{\nu=3}^{x}(x-\nu)^2\ (1)$$

$$\sum_{\nu=3}^{x}(x-\nu)^2=(x-3)^2+(x-4)^2+(x-5)^2+(x-6)^2+\ldots+(x-x+1)^2+(x-x)^2=$$

$$\sum_{\nu=3}^{x}(x-\nu)^2=(x-3)^2+(x-5)^2+\ldots+(x-x+1)+(x-4)^2+(x-6)^2+\ldots+(x-x)^2=$$

(Αν x άρτιος. Ανάλογα και για περιττό)

$$\sum_{\nu=3}^{x}(x-\nu)^2=\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{x-1}{2}\right]}(x-2\nu-1)^2+\sum_{\nu=2}^{\left[\frac{x}{2}\right]}(x-2\nu)^2\ (2)$$

Η (1) μέσω της (2):

$$S=(x-1)^2+2\cdot(x-2)^2+4\cdot\sum_{\nu=2}^{\left[\frac{x}{2}\right]}(x-2\nu)^2+3\cdot\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{x-1}{2}\right]}(x-2\nu-1)^2,\ \nu\in\mathbb{N}$$

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Ο παραπάνω γενικός τύπος μπορεί με τροποποιήσεις να χρη-σιμοποιηθεί, αν το αρχικό σχήμα, αντί για τετράγωνο, είναι ορθογώνιο:
Αν χ, ψ οι διαστάσεις του ορθογωνίου, τότε τα τετράγωνα που
σχηματίζονται δίνονται από τον τύπο:

$$S=\sum_{\nu=1}^{x}(x-\nu)(y-\nu)+\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{x}{2}\right]}(x-2\nu)(y-2\nu)+2\cdot\sum_{\nu=3}^{x}(x-\nu)(y-\nu),\ \nu\in\mathbb{N},\ \text{και } y>x$$

$$S=(x-1)(y-1)+2\cdot(x-2)(y-2)+4\cdot\sum_{\nu=2}^{\left[\frac{x}{2}\right]}(x-2\nu)(y-2\nu)+3\cdot\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{x-1}{2}\right]}(x-2\nu-1)(y-2\nu-1)$$

για $x\geq 3$, και $y>x$, και $\nu\in\mathbb{N}$

Αντώνης
Φαντάκης,
Ιανουάριος 2009