ΟΕΦΕ 2001

Θέμα 2ο

Δίνεται ο μιγαδικός z και έστω $f(z)=\dfrac{2+i\bar{z}}{1-\bar{z}}, z\neq 1$.

α). Να βρείτε το μέτρο και ένα όρισμα του μιγαδικού f(2).

β). Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $w=[f(2)]^{2004}$ είναι πραγματικός.

γ). Να αποδείξετε ότι $\left|\dfrac{f(z)-2}{f(z)+i}\right|=|z|$.

δ). Αν $|z|=1$ και M είναι η εικόνα του f(z) στο μιγαδικό επίπεδο, να αποδείξετε ότι το M κινείται σε ευθεία, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

Θέμα 3ο

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=\dfrac{(\alpha-1)x+6}{x+\beta}$, με $x\in(-1,\infty)$ και $\alpha,\beta\in R$ η οποία έχει ασύμπτωτες τις ευθείες ψ=2 και χ=-1.

α). Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=\dfrac{2x+6}{x+1}, x>-1$

β). Να βρείτε συνάρτηση G(x) τέτοια ώστε G′(x)=f(x), για κάθε x>-1, της οποίας η γραφική παράσταση να διέρχεται από το σημείο M(0,2).

γ). Να μελετήσετε την μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης $h(x)=\dfrac{G(x)}{x+1}, x>-1$.

Θέμα 4ο

Δίνονται οι παραγωγίσιμες στο R συναρτήσεις f,g τέτοιες ώστε να ισχύει $\int_1^x f(t)dt+\int_x^1 g(t)dt=x^2-2x+1, \forall x\in R$. και έστω C_f, C_g οι γραφικές τους παραστάσεις.

Έστω ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει δύο λύσεις ρ_1,ρ_2 με $\rho_1<1<\rho_2$.

α). Να αποδείξετε ότι :

i) Η εξίσωση g(x)=0 έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα (ρ_1,ρ_2).

ii) υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\rho_1,\rho_2)$ τέτοιο ώστε g′(ξ)=-2.

β). Αν η συνάρτηση g είναι κυρτή στο R, να αποδείξετε ότι :

i) Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο R.

ii) Η f έχει ένα μόνο ελάχιστο στο R, το οποίο παρουσιάζεται στο σημείο $x_0=\xi$ του ερωτήματος α) ii)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g και τον άξονα των ψ.

ΟΕΦΕ 2002

Θέμα 2ο

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$, για την οποία ισχύουν : $\lim_{x\to\infty}f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, και $f'(x)=\dfrac{2}{1+e^{f(x)}}, \forall x\in R, f'(0)=1$.

α). Να αποδείξετε ότι η f :

1) είναι γνησίως αύξουσα στο R και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

2) στρέφει τα κοίλα κάτω στο R.

3) έχει μοναδική ρίζα την x=0.

β). Να αποδείξετε ότι :

1) ισχύει $f(x)+e^{f(x)}=2x+1, \forall x\in R$.

2) Η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφή της.

3) Οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} έχουν κοινή εφαπτόμενη στην αρχή των αξόνων.

γ).

1) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

2) Να δείξετε ότι η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Θέμα 3ο

Δίνεται ο μιγαδικός $z\neq-2i$ και θεωρούμε τον $f(z)=\dfrac{2z}{z+2i}$. Έστω ρ το μέτρο και θ ένα όρισμα του μιγαδικού $z+2i$.

i) Βρείτε τις συντεταγμένες της εικόνας A του μιγαδικού z_0 στο μιγαδικό επίπεδο, για τον οποίο ισχύει $f(z_0)=3+i$.

ii) Να βρείτε συναρτήσει των ρ και θ, το μέτρο και ένα όρισμα του μιγαδικού $f(z)-2$.

iii) Αν $|f(z)-2|=\sqrt{2}$, να αποδείξετε ότι η εικόνα M του z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκει σε κύκλο c, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

iv) Αν $Arg(f(z)-2)=\dfrac{\pi}{4}$, να αποδείξετε ότι η εικόνα M του z ανήκει σε μια ημιευθεία ε,

v) Να αποδείξετε ότι το σημείο A ανήκει στον κύκλο c και την ημιευθεία ε.

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ και έστω F, G με $F(x)=\int_{1/e}^{x}f(t)dt$, $G(x)=\int_{1/e}^{x}\dfrac{f(t)}{t^2}dt$, με x>0.

Να αποδείξετε ότι :

α). Είναι $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f(x)$ για κάθε $x\in R^*$.

β). $-\frac{1}{8} \le f'(x) \le 1$ για κάθε $x \in R$.

γ). Για τους πραγματικούς αριθμούς α,β με 0<α<β ισχύει $f\left(\frac{1}{\beta}\right) - f\left(\frac{1}{\alpha}\right) \le \beta - \alpha$.

δ). Ο τύπος της συνάρτησης g με $g(x) = F(x) + G(x), x > 0$ είναι $g(x) = \ln x + 1, x > 0$.

ε). Αν η συνάρτηση h είναι συνεχής στα σημεία $x_1 = 0, x_2 = \frac{\pi}{2}$ και $h(x) = F(\varepsilon\varphi(x)) + G(\sigma\varphi(x))$ με $0 < x < \frac{\pi}{2}$, τότε είναι σταθερή στο διάστημα $\Delta = [0, \frac{\pi}{2}]$. Να βρεθεί η τιμή της h.

στ) Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f'(x),h(x) και την ευθεία x=1 είναι ίσο με $\frac{1}{2}$.

Θέμα 2° (παραλλαγή 2)

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$, για την οποία ισχύουν : $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, και $f'(x) = \frac{2}{1+e^{f(x)}}, \forall x \in R, f'(0) = 1$.

α). Να αποδείξετε ότι η f :

1) είναι γνησίως αύξουσα στο R και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

2) έχει μοναδική ρίζα την x=0.

β).Να αποδείξετε ότι : ισχύει $f(x) + e^{f(x)} = 2x + 1, \forall x \in R$.

γ).

1) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

2) Να δείξετε ότι η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

δ). Να γίνει ο πίνακας μεταβολών της f και μια πρόχειρη γραφική της παράσταση.

Θέμα 4° (παραλλαγή 2)

Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ με $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ και έστω F, G με $F(x) = \int_{1/e}^{x} f(t)dt$, $G(x) = \int_{1/e}^{x} \frac{f(t)}{t^2}dt$, με x>0.

Να αποδείξετε ότι :

α). Είναι $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ για κάθε $x \in R^*$.

β). $f'(x) \le 1$ για κάθε $x \in R$.

γ). Για κάθε x>0 ισχύει $f\left(\frac{1}{x}\right) - f\left(\frac{1}{\eta\mu x}\right) \le x - \eta\mu x$.

δ). Ο τύπος της συνάρτησης g με $g(x) = F(x) + G(x), x > 0$ είναι $g(x) = \ln x + 1, x > 0$.

ε). Αν η συνάρτηση h είναι συνεχής στα σημεία $x_1 = 0, x_2 = \frac{\pi}{2}$ και $h(x) = F(\varepsilon\varphi(x)) + G(\sigma\varphi(x))$ με $0 < x < \frac{\pi}{2}$, τότε είναι σταθερή στο διάστημα $\Delta = [0, \frac{\pi}{2}]$. Να βρεθεί η τιμή της h.

στ). Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f'(x),h(x) και την ευθεία x=1 είναι ίσο με $\frac{1}{2}$.

Θέμα 4° (παραλλαγή 3)

Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ με $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ και έστω F, G με $F(x) = \int_{1/e}^{x} f(t)dt$, $G(x) = \int_{1/e}^{x} \frac{f(t)}{t^2}dt$, με x>0.

Να αποδείξετε ότι :

α). Είναι $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ για κάθε $x \in R^*$.

β). $-\frac{1}{8} \le f'(x) \le 1$ για κάθε $x \in R$.

γ). Για τους πραγματικούς αριθμούς α,β με 0<α<β ισχύει $f\left(\frac{1}{\beta}\right) - f\left(\frac{1}{\alpha}\right) \le \beta - \alpha$.

δ). Ο τύπος της συνάρτησης g με $g(x) = F(x) + G(x), x > 0$ είναι $g(x) = \ln x, x > 0$.

ε).

1) Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x) και τον άξονα xx' και τις ευθείες x=1 και x=e είναι ίσο με $\ln\sqrt{\frac{1+e^2}{2}}$.

2) $\int_1^e \frac{1}{t(1+t^2)}dt = 1 - \ln\sqrt{\frac{1+e^2}{2}}$.

ΟΕΦΕ 2003

Θέμα 2°

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln(ax)}{\sqrt{x}}, a > 0$.

Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $x - y = 0$, να βρείτε την τιμή του α.

Για $a = 1$:

Να μελετήσετε τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατα της f.

Να βρείτε το σύνολο τιμών και τις ασύμπτωτες.

Να αποδείξετε ότι: $\left(\sqrt{\kappa}\right)^{\sqrt{\kappa+1}} > \left(\sqrt{\kappa+1}\right)^{\sqrt{\kappa}}$ για κάθε θετικό ακέραιο $\kappa \ge 8$.

Θέμα 3°

Δίνονται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $0 < \alpha < \beta$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z = \alpha + \beta i$ και $w = f(\alpha) + i \cdot f(\beta)$ με $f(\beta) \ne 0$.

Να αποδείξετε ότι:

Ο αριθμός $z_1=\dfrac{1+\beta-i\cdot\bar{z}}{1+f(\beta)-i\cdot\bar{w}}$ είναι πραγματικός αν και μόνο αν $f(a)=a$.

Αν $z=-iw$ τότε οι εικόνες των z, w στο μιγαδικό επίπεδο και η αρχή O των αξόνων, είναι κορυφές ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου.

Έστω ότι ισχύει $|z-iw|^2=|z|^2+|iw|^2$. Να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha\cdot f(\beta)-\beta\cdot f(\alpha)=0$.

ii) Οι εικόνες των z, w και η αρχή O είναι συνευθειακά σημεία.

iii) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(a,\beta)$ τέτοιο ώστε, η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_0,\ f(x_0))$ να διέρχεται από το σημείο $0(0,\ 0)$.

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f''(x)$ συνεχή στο $\Re$ τέτοια ώστε να ισχύουν:

$\int_0^x (t^2+1)\cdot f''(t)dt=2\int_1^0 t\cdot f(t)dt-4\int_0^1 x\cdot t\cdot f(x)dt$ για κάθε $x\in\Re$, με $f(0)=0$ και $f'(0)=2$.

α) Να αποδείξετε ότι ο τύπος της είναι $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$, $x\in\Re$.

β) Έστω $E(\alpha)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=a>0$.

Αν το α μεταβάλλεται με ρυθμό $\dfrac{10}{3}cm/\sec$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού $E(\alpha)$, τη χρονική στιγμή κατά την οποία $\alpha=3$cm.

γ) Θεωρούμε συνεχή συνάρτηση g για την οποία ισχύει: $|g(x)+x-2|\le|f(x)|$ για κάθε $x\in\Re$.

i) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=-x+2$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g όταν $x\to+\infty$.

ii) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g, την πλάγια ασύμπτωτη της στο $+\infty$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=2$, να αποδείξετε ότι: $E\le\ln 5$.

ΟΕΦΕ 2004

Θέμα 2ο

Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και παραγωγίσιμες στο $\Re$ με $f'(x)-g'(x)=1,\quad f'(x)\neq 1$ για κάθε $x\in\Re$.

Αν στο όριο $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)+2}{f(x)-x-2}$ εφαρμόσουμε τον κανόνα του ορίου πηλίκου, παρουσιάζεται απροσδιοριστία της μορφής $\dfrac{0}{0}$.

α. i) Να υπολογίσετε το όριο L.

ii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g στο $+\infty$.

β. Να αποδείξετε ότι η g έχει το πολύ μια ρίζα στο $\Re$.

γ. Να αποδείξετε ότι: $f(x)-g(x)=x+4$ για κάθε $x\in\Re$.

Θέμα 3ο

Για κάθε $x\in\Re$ ορίζουμε την συνάρτηση $g(x)=\int_0^x\dfrac{2}{\alpha+e^t}dt,\ a>0$ και τον μιγαδικό $z=g(x)+xi$ με $|\bar{z}+i|\le|z-1|$.

Να αποδείξετε, ότι :

i) η g αντιστρέφεται

ii) οι εικόνες του z ανήκουν στην γραφική παράσταση της g^{-1}.

Να αποδείξετε, ότι:

i) $\mathrm{Re}(z)\le\mathrm{Im}(z)$, για κάθε $x\in\Re$.

ii) $\alpha=1$.

iii) $\dfrac{1}{1+e^2}<\int_0^2\dfrac{1}{\alpha+e^t}dt-\int_0^1\dfrac{1}{\alpha+e^t}dt<\dfrac{1}{1+e}$.

Θέμα 4ο

Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και παραγωγίσιμες στο $\Re$ με $g(0)=1$ και $f'(x)=g^2(x)\neq 0$, $f^2(x)+g^2(x)=1$ για κάθε $x\in\Re$.

Α). Να αποδείξετε ότι:

i) $g'(x)=-g(x)\cdot f(x)$, $x\in\Re$.

ii) Η g είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,\ 0],[0,+\infty)$ και έχει ακρότατο το 1.

Β).

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της.

ii) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $O(0,\ 0)$.

Γ). Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου, που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $y=x.\ x=1$, να δείξετε ότι $E=\dfrac{1}{2}+\ln[g(1)]$.

ΟΕΦΕ 2005

Θέμα 2°

Έστω η συνάρτηση $f(x)=2\sqrt{x}\cdot(\ln x-2),\ x>0$.

α). Να αποδείξετε ότι: $f'(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}},\ x>0$

β). Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$.

γ). Να μελετήσετε τα κοίλα της f και να βρείτε το σημείο της καμπής της.

δ). Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\dfrac{1}{e}$ και $x=e^2$.

Θέμα 3°

Δίνεται ο μιγαδικός $z=e^x+(x-1)i,\ x\in\Re$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{Re}(z)>\mathrm{Im}(z)$ για κάθε $x\in\Re$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ τέτοιος ώστε ο αριθμός $w=z^2+z+2i$ να είναι πραγματικός.

γ) Να βρείτε το μιγαδικό z του οποίου το μέτρο να γίνεται ελάχιστο.

Θέμα 4°

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\Re$ για την οποία ισχύουν $f(0)=\dfrac{1}{2}$ και

$e^x\left[f(x)+f'(x)\right]+\eta\mu x=-f'(x)$ για κάθε $x\in\Re$.

α) Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\, x}{1+e^x},\ x\in\Re$ και ότι ισχύει $f(x)+f(-x)=\sigma\upsilon\nu\, x$ για κάθε $x\in\Re$.

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)dx$.

δ) Να αποδείξετε ότι: $0\le\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx\le\frac{\pi}{4}$.

ΟΕΦΕ 2006

Θέμα 2°

Δίνονται οι μιγαδικοί z και $w=\dfrac{z+1}{1+iz}$ όπου $z\neq i$.

α). Να αποδείξετε ότι: $\left|\dfrac{w-i}{w+i}\right|=|z|$.

β). Αν $|z|=1$ και Μ η εικόνα του w στο μιγαδικό επίπεδο, να αποδείξετε ότι το σημείο Μ ανήκει στον άξονα $x'x$.

γ). Να αποδείξετε την ισοδυναμία w φανταστικός $\Leftrightarrow$ z φανταστικός.

δ). Θεωρούμε συνάρτηση f συνεχή στο $[\alpha,\ \beta]$ με $f(\alpha)>1$ και έστω $z=f(\alpha)\cdot i$ και $w=f(\beta)\cdot i$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(\alpha,\ \beta)$.

Θέμα 3°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-ax-1$ όπου $\alpha>1$.

α). Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0,\ f(0))$.

β). Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο το οποίο είναι αρνητικό.

γ). Έστω $\mathrm{E}(\alpha)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την εφαπτομένη της στο $(0,\ f(0))$ και την ευθεία $x=a>1$.

i) Να αποδείξετε ότι: $E(a)=e^a-\dfrac{a^2}{2}-a-1$.

ii) Να βρείτε το $\lim\limits_{a\to+\infty} E(a)$.

Θέμα 4°

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\Re$ με $f(x)>0$ και έστω $g(x)=\displaystyle\int_0^1 t\cdot f(xt)dt,\quad t,x\in\Re$.

Να αποδείξετε ότι:

α). $g(x)=\dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x t\cdot f(t)dt$ για κάθε $x\neq 0$.

β). Η g είναι συνεχής στο $x_0=0$.

γ). $x\cdot g(x)<\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ για κάθε $x>0$.

δ) Αν $\displaystyle\int_1^2 t\cdot f(t)dt=3\int_0^x t\cdot f(t)dt$ τότε υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi\in(1,\ 2)$ τέτοιος ώστε: $2g(\xi)=f(\xi)$.

ΟΕΦΕ 2007

Θέμα 2ο

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\left(x^2+a\right)\cdot e^{-x}, x\in\Re$. Αν η ευθεία $y=-2x+2$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $\mathrm{M}(0,\ f(0))$ τότε:

α). Να αποδείξετε ότι: $\alpha=2$.

β). Να μελετήσετε τη μονοτονία της f.

γ). Να υπολογίσετε τα όρια:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

δ). Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2007$ έχει ακριβώς μια λύση στο $\Re$.

Θέμα 3ο

Δίνονται οι μιγαδικοί z,w με $z\cdot w\neq 0$ για τους οποίους ισχύει: $|z+w|=|z-w|$

Να αποδείξετε ότι:

α) $\mathrm{Re}\left(z\cdot\overline{w}\right)=0$.

β) Ο αριθμός $\dfrac{z}{w}$ είναι φανταστικός.

γ) Το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των z,w στο μιγαδικό επίπεδο και την αρχή των αξόνων, είναι ορθογώνιο στο Ο.

δ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $0<\alpha<\beta$ και $z=a+i\cdot f(a), w=f(\beta)-\beta i$ τότε η εξίσωση $x\cdot f'(x)=f(x)$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(\alpha,\ \beta)$.

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$ όπου $t,x\in\Re$.

α) Να μελετήσετε ως προς τα κοίλα τη συνάρτηση g.

β) Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{x}{1+x^2}\leq g(x)\leq x$ για κάθε $x\geq 0$.

γ) Να αποδείξετε ότι: $g(x)+g(-x)=0$ για κάθε $x\in\Re$.

δ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0, x=1$ είναι $E=g(1)-\dfrac{1}{2}\ln 2\,\tau.\mu.$.

ΟΕΦΕ 2008

Θέμα 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x)=\begin{cases}\eta\mu x+\lambda, & \alpha\nu\ \ x>0\\ (\mu-1)x+1, & \alpha\nu\ \ x\leq 0\end{cases}$$ με $\lambda,\mu\in\Re$.

α. Να βρείτε την τιμή του λ, ώστε η f να είναι συνεχής.

β. Να βρείτε την τιμή του μ, ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

γ. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι 1-1.

δ. Για $\lambda=1$ και $\mu=2$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-2}^{\pi} f(x)dx$.

Θέμα 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=e^{1-e^x}$, $x\in\Re$.

Α).

i) Να την μελετήσετε ως προς την μονοτονία.

ii) Να αποδείξετε ότι $f''(x)=\left(e^x-1\right)\cdot e^{1+x-e^x}$, να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης.

Β). Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Γ). Να παραστήσετε γραφικά την f.

Δ). Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της $f'(x)$, τους άξονες $x'x,\ y'y$ και την ευθεία $x=\ln\dfrac{1}{2}$.

Θέμα 4ο

Οι συναρτήσεις $f,g:\Re\to\Re$ είναι συνεχείς και για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύουν:

$\int_1^x f(t)dt-2=x\int_0^x g(t)dt$ (1) και $g(x)\neq 0$ (2). Να αποδείξετε ότι:

Α). Η f παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και $f'(0)=2g(0)$.

Β). $g(x)<0$ για κάθε $x\in\Re$.

Γ). $\int_1^x f(t)dt\leq\int_1^0 f(t)dt$ για κάθε $x\in\Re$.

Δ). Η εξίσωση $f(x)=2g(x)+2$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(0,\ 1)$.

ΟΕΦΕ 2009

ΘΕΜΑ 2°

Δίνεται η εξίσωση $z+\frac{1}{z}=-1, z\in C$ και z_1, z_2 οι ρίζες της.

Να αποδείξετε ότι:

i) $z_1\cdot z_2=1$ και $z_1^3=1$.

ii) $\left(z_1^{2009}+z_2^{2009}\right)\in\Re$.

iii) $z_1^8+\frac{1}{z_2^{10}}+1=0$.

iv) Αν $f(x)$ συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $f(0)-2=\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}$ και $f(1)=\frac{1}{2z_1}+\frac{1}{2z_2}-\frac{3}{2}$ τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ ώστε $f(x_0)=3x_0-2$.

v) Αν Γ είναι η εικόνα του μιγαδικού $w=2z_1+2z_2$ και Α, Β οι εικόνες των z_1 και z_2 αντίστοιχα, να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

ΘΕΜΑ 3°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+2+2\ln x$.

i) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και να βρείτε τα διαστήματα στα οποία είναι κυρτή ή κοίλη.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών και το πλήθος των ριζών της f.

iii) Αν $g(x)=\frac{x\cdot\ln x}{x+2}$ να δείξετε ότι υπάρχει $x_0>0$ ώστε: $g(x)\ge g(x_0)$ για κάθε $x>0$.

iv) Να δείξετε ότι για κάθε $x>2$ ισχύει: $f(x-2)<2f(x+1)-f(x+4)$.

ΘΕΜΑ 4°

Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις: $f'\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x+1}{e^x}$ και $f(1)=\frac{1}{e}$.

i) Να δείξετε ότι $f(x)=x\cdot e^{-1/x}$.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f(x)$ στο σημείο με τετμημένη $x=1$.

iii) Να δείξετε ότι $\int_1^2 f(x)dx>\frac{2}{e}$.

iv) Αν $g(x)=\frac{f(x)}{x^3}$, να βρείτε το εμβαδόν $E(t)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_g, τον $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=t$ με $t>1$.

v) Να βρείτε το $\lim_{x\to+\infty}E(t)$.

ΟΕΦΕ 2010

ΘΕΜΑ 2^O

Οι μιγαδικοί αριθμοί z, w συνδέονται με τη σχέση $z=\frac{1+2w}{1-w}$ και η εικόνα του w ανήκει στον κύκλο με κέντρο Κ(-1,0) και ακτίνα ρ=1.

α). Να δείξετε ότι η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο με κέντρο το Ο(0,0) και ακτίνα ρ=1.

β). Αν $|z|=1\,(1)$ και z_1, z_2, z_3 οι εικόνες τριών μιγαδικών αριθμών για τους οποίους ισχύει η σχέση (1) να δείξετε ότι:

i) Ο αριθμός $\alpha=\frac{z_1+z_2}{z_3}+\frac{z_2+z_3}{z_1}+\frac{z_1+z_3}{z_2}$ είναι πραγματικός.

ii) Αν επιπλέον $z_1+z_2+z_3=0$ τότε να αποδείξετε ότι: $\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}\right)=-\frac{3}{2}$.

γ). Δίνεται η ευθεία (ε): $3x+4y-12=0$. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη απόσταση των εικόνων του μιγαδικού w από την ευθεία (ε).

ΘΕΜΑ 3^O

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε για κάθε $x>0$ ισχύουν $x\cdot f'(x)=\frac{x+1}{e^{f(x)}+1}$ και $f(1)=0$.

α). Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=e^x+x$ είναι 1-1.

β). Να δείξετε ότι $f(x)=\ln x$ για κάθε x>0.

γ). Να μελετήσετε τη συνάρτηση $h(x)=\frac{f(x)-1}{x}$ ως προς την μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

δ). Να λύσετε την εξίσωση $\left(\frac{\eta\mu x}{e}\right)^{\sigma\upsilon\nu x}=\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{e}\right)^{\eta\mu x}$ αν $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

ε). Να εξετασθεί η h ως προς κυρτότητα και να δείξετε ότι κάθε x_1, x_2 με $x_2>x_1>0$ ισχύει $\frac{h(x_2)-h(x_1)}{x_2-x_1}\ge-\frac{1}{2e^5}$

ΘΕΜΑ 4^O

Έστω συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε $\int_3^x\left(\int_1^u f(t)dt\right)du\ge 2x-6$ για κάθε $x\in\Re$. Να αποδείξετε ότι:

α). $\int_1^3 f(t)dt=2$.

β). Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α (0,f(0)) είναι η ευθεία $4x+y-3=0$ να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t^2 f(t)dt - x^3}{x^4}$

γ). Αν για κάθε $x\ge 1$ ισχύει $f'(x)>0$ και $h(x)=\int_1^x f(t)dt$, να αποδείξετε ότι για κάθε $x>1$ ισχύει $h'(x)>\dfrac{h(x)}{x-1}$.

δ). Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,3)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)+3=2\xi$.

ΟΕΦΕ 2011

ΘΕΜΑ 2°

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$f(x)=4x^3+12\lambda x^2+(\lambda-1)x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

όπου $\lambda\in\mathbb{R}$ η οποία παρουσιάζει στο $x_0=-1$ καμπή.

Α).

i) Να αποδείξετε ότι $\lambda=1$.

ii) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη.

Β). Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}$

Γ).

i) Να βρείτε την αρχική της f της οποία η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $(0,1)$.

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$.

ΘΕΜΑ 3°

Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(\eta\mu x)+f(\sigma\upsilon\nu x)=1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Α). Να αποδείξετε ότι:

i) $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$ και $f(0)+f(1)=1$

ii) Υπάρχει $x_0\in[0,1]$ τέτοιο, ώστε: $f(x_0)+x_0=1$

Β). Έστω, επιπλέον, ότι η f είναι παραγωγίσιμη και $f(x)\ge\sqrt{2}x-\dfrac{1}{2}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i) Να βρείτε την $f'\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ και να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της με τετμημένη $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

ii) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(\sigma\upsilon\nu x)}{\eta\mu x}$.

ΘΕΜΑ 4°

Να αποδείξετε ότι $e^x-x\ge 1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Πότε ισχύει η ισότητα $e^x-x=1$;

Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$.

Για κάθε $x\ge 0$ θεωρούμε το μιγαδικό z, με:

$z=\int_0^x e^{f(t)}dt+ix\int_0^1 e^{f(x-xt)}dt$ και

$\dfrac{|z|}{\sqrt{2}}=\int_0^x\left[f(t)+e^t\right]dt+f(\alpha)-1$, όπου $\alpha>0$.

Να αποδείξετε ότι:

Α).

i) $\dfrac{z}{1+i}=\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Im}(z)\ge 0$, για κάθε $x\ge 0$

ii) $e^{f(x)}=f(x)+e^x$, για κάθε $x\ge 0$.

Β). Η f είναι γνησίως αύξουσα.

Γ). Η f έχει αντίστροφη και να βρείτε την αντίστροφή της.

Δ). Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,+\infty)$, τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(0,\alpha)$ τέτοιο, ώστε $\alpha f'(\xi)=1$.

ΟΕΦΕ 2012

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^{x-2}$ και $g(x)=\ln x+2$

Β1.Να βρείτε τις συνθέσεις $f\circ g$ και $g\circ f$ και να εξετάσετε αν είναι ίσες.

Β2.Να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη και να βρείτε την f^{-1}.

Β3.Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^{x-2}=\ln x+2$ έχε μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(e^{-2},2)$.

Β4.Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{(g\circ f)(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{(f\circ g)(x)}=0$

ΘΕΜΑ Γ

Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $\left(1+3\alpha^2\right)f(x)=e^{\int_x^1 2tf(t)dt}$,όπου $a\in\mathbb{R}-\{0\}$.

Γ1.Να αποδείξετε ότι :

i. Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=-2xf^2(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3\alpha^2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ2.Να αποδείξετε ότι η τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^\alpha tf(t)dt$. είναι ανεξάρτητη του α.

Γ3.Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά την f.

Γ4.Αν Ε είναι το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από τους άξονες, την γραφική παράσταση της f και την ευθεία $x=\alpha$, να αποδείξετε ότι: $\dfrac{1}{4|\alpha|}<E<\dfrac{1}{3|\alpha|}$

ΘΕΜΑ Δ

Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0)=2$, $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{f(x)-2e^{x+2}}{x+2}=-1$ και $f''(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι:

Δ1. $f'(-2)=1$ και $f(x)\le x+4$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Δ2.Η f παρουσιάζει μέγιστο σε σημείο $x_0\in(-2,0)$.

Δ3.Η εξίσωση $f'\left(\int_0^{2(x-5)} f(t-x)dt\right)=f'(0)$ έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{R}$ την $x=5$.

Δ4.Ο μιγαδικός αριθμός z για τον οποίο ισχύει $f(|z+i|)\le f(|z|+1)$ είναι φανταστικός.