Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|x^2+px+q|$, με $x\in[-1,1]$, και p, q∈IR.

Για ποιες τιμές των p, q το μέγιστο της συνάρτησης γίνεται ελάχιστο;

Mathematica.gr
Apostolakis

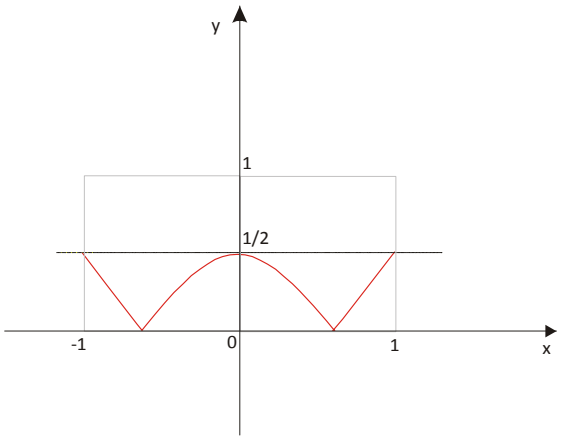
ΛΥΣΗ:

Για p = 0, είναι $f(x)=|x^2+q|$

Αν $q \geq 0$, η f είναι γν. φθιν. στο [-1, 0] και γν. αύξουσα στο [0, 1],
οπότε έχει max τα f(-1) = f(1) = |1 + q|, και παίρνει την ελάχιστη τιμή για q = 0,
την f(-1) = f(1) = 1.

Αν $-1 \leq q \leq 0$, η f έχει τοπ. μέγιστα τα f(-1) = f(1) = 1 + q και f(0) = -q.
Ελάχιστη τιμή για q = -1/2, την τιμή f(-1) = f(1) = f(0) = 1/2

Αν q < -1, λόγω συμμετρίας της
-f(x) με την f(x) στο $\left[-\sqrt{-q},\sqrt{-q}\right]$,
εύκολα βλέπουμε ότι το μέγιστο
είναι το f(0) = -q > 1.
Οπότε, μέχρι στιγμής ελάχιστο είναι το 1/2.



Στη γενική περίπτωση:

Η f έχει ακρότατο στο $x_0=-\frac{p}{2}$.

Θα διερευνήσουμε τις
περιπτώσεις: $p \leq -2$ ή $p \geq 2$ και $-2 < p < 2$.

Αν $p \leq -2$ ή $p \geq 2$ τότε $x_0 \geq 1$ ή $x_0 \leq -1$.

Τότε η $f(x)=|x^2+px+q|$ έχει ακρότατα μόνο τα:

$$f(-1)=|1-p+q| \quad \text{και} \quad f(1)=|1+p+q|$$

και επειδή είναι γνήσια μονότονη στο [–1, 1], έχει ένα **ελάχιστο** κι ένα **μέγιστο**.

Θα δείξουμε ότι σε κάθε περίπτωση η ελάχιστη τιμή του μεγίστου της f στο [-1, 1] είναι μεγαλύτερη από 1/2.

Για $p \leq -2$ έστω ότι $f(-1)\leq\frac{1}{2}$.

Τότε: $-\frac{1}{2}\leq q-p+1\leq\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2p-\frac{1}{2}\leq q+p+1\leq 2p+\frac{1}{2} \underset{p<-2}{\Rightarrow} q+p+1<-\frac{7}{2}$.

Οπότε $f(1)>\frac{1}{2}$, δηλαδή η f έχει μέγιστο στο 1 με **max f(x) > 1/2**.

Για $p \geq 2$ έστω ότι $f(-1)\leq\frac{1}{2}$.

Τότε: $-\frac{1}{2}\leq q-p+1\leq\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2p-\frac{1}{2}\leq q+p+1\leq 2p+\frac{1}{2} \underset{p>2}{\Rightarrow} q+p+1>\frac{7}{2}$.

Οπότε $f(1)>\frac{1}{2}$, δηλαδή η f έχει μέγιστο στο 1 με **max f(x) > 1/2**.

Για $0 < p < 2$

Έστω ότι το τοπικό ακρότατο $f(1) \le \frac{1}{2}$.

Τότε $-\frac{1}{2} \le q+p+1 \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2}-p \le q \le -\frac{1}{2}-p \underset{p>0}{\Rightarrow} q \le 0$.

Οπότε η διακρίνουσα της $y = x^2 + px + q$, είναι: $\Delta = p^2 - 4q > 0$,

άρα το $f\left(-\frac{p}{2}\right) = \left|q-\frac{p^2}{4}\right| \underset{q<0}{=} \frac{p^2}{4}-q$ είναι **τοπικό μέγιστο**.

Είναι: $\frac{p^2}{4}+\frac{3}{2}+p \ge \frac{p^2}{4}-q \ge \frac{p^2}{4}+\frac{1}{2}+p$ άρα $f\left(-\frac{p}{2}\right) > \frac{1}{2}$.

Για $-2 < p < 0$

Έστω ότι το τοπικό ακρότατο $f(-1) \le \frac{1}{2}$.

Τότε $-\frac{1}{2} \le q-p+1 \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow p-\frac{3}{2} \le q \le p-\frac{1}{2} \underset{p<0}{\Rightarrow} q \le 0$.

Οπότε η διακρίνουσα της $y = x^2 + px + q$, είναι: $\Delta = p^2 - 4q > 0$,

άρα το $f\left(-\frac{p}{2}\right) = \left|q-\frac{p^2}{4}\right| \underset{q<0}{=} \frac{p^2}{4}-q$ είναι **τοπικό μέγιστο**.

Είναι: $\frac{p^2}{4}+\frac{3}{2}-p \ge \frac{p^2}{4}-q \ge \frac{p^2}{4}+\frac{1}{2}-p$ άρα $f\left(-\frac{p}{2}\right) > \frac{1}{2}$.

Σε κάθε περίπτωση, η ελάχιστη τιμή του max f(x) είναι 1/2.

Γιώργος Ρίζος