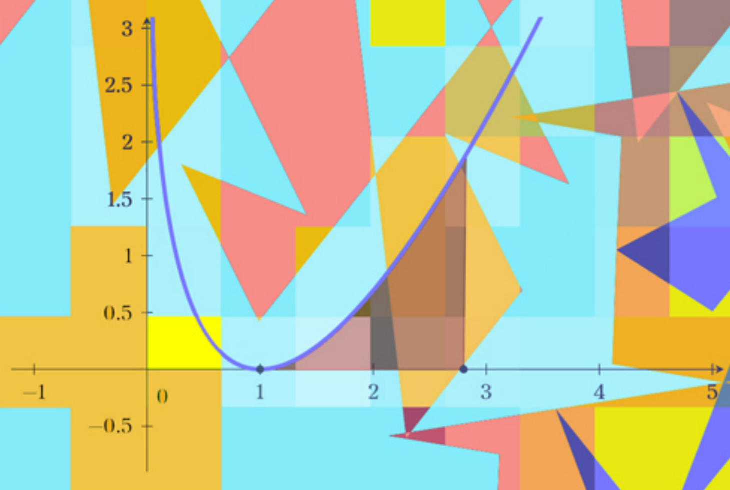
Εικοσιδωδεκάεδρον

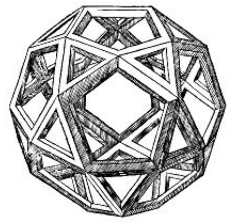
Μαθηματικό Δελτίο

Τεύχος 10ο
Οκτώβριος 2012



www.mathematica.gr

Το «Εικοσιδωδεκάεδρον» παρουσιάζει θέματα που έχουν συζητηθεί στον ιστότοπο http://www.mathematica.gr.
Η επιλογή και η φροντίδα του περιεχομένου γίνεται από τους Επιμελητές του http://www.mathematica.gr.
Μετατροπές σε LATEX: *Φωτεινή Καλδή, Αναστάσης Κοτρώνης*, Σχήματα: *Μιχάλης Νάννος, Χρήστος Τσιφάκης* Σελιδοποίηση: *Φωτεινή Καλδή, Αναστάσης Κοτρώνης, Νίκος Μαυρογιάννης*, Εξώφυλλο: *Γρηγόρης Κωστάκος*. Στοιχειοθετείται με το LATEX.



Εικοσιδωεκάεδρο φιλοτεχνημένο από τον Leonardo da Vinci

Το εικοσιδωδεκάεδρο είναι ένα πολύεδρο (32-εδρο) με είκοσι τριγωνικές έδρες και δώδεκα πενταγωνικές. Έχει 30 πανομοιότυπες κορυφές στίς οποίες συναντώνται δύο τρίγωνα και δύο πεντάγωνα και εξήντα ίσες ακμές που η κάθε μία τους χωρίζει ένα τρίγωνο από ένα πεντάγωνο. Είναι αρχιμήδειο στερεό - δηλαδή ένα ημικανονικό κυρτό πολύεδρο όπου δύο ή περισσότεροι τύποι πολυγώνων συναντώνται με τον ίδιο τρόπο στις κορυφές του - και ειδικότερα είναι το ένα από τα δύο οιωνεί κανονικά - quasiregular πολύεδρα που υπάρχουν, δηλαδή στερεό που μπορεί να έχει δύο τύπους εδρών οι οποίες εναλλάσσονται στην κοινή κορυφή (Το άλλο είναι το κυβο - οκτάεδρο). Το εικοσιδωδεκάεδρο έχει εικοσιεδρική συμμετρία και οι συντεταγμένες των κορυφών ενός εικοσαέδρου με μοναδιαίες ακμές είναι οι κυκλικές μεταθέσεις των $(0, 0, \pm\varphi)$, $\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\varphi}{2}, \pm\frac{1+\varphi}{2}\right)$, όπου φ ο χρυσός λόγος $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ενώ το δυαδικό του πολύεδρο είναι το ρομβικό τριακοντάεδρο.

Πηγή:http://en.wikipedia.org/wiki/Icosidodecahedron

Απόδοση: Πάνος Γιαννόπουλος

Ο δικτυακός τόπος mathematica.gr ανήκει και διευθύνεται σύμφωνα με τον κανονισμό του που υπάρχει στην αρχική του σελίδα (http://www.mathematica.gr) από ομάδα Διευθυνόντων Μελών.

Οι Ασκήσεις

Διασκεδαστικά Μαθηματικά

ΑΣΚΗΣΗ 1 *(Προτείνει ο KARKAR) Λήμμα : Ένας ακέραιος είναι διαιρετός δια του 11, αν η διαφορά $s_\alpha - s_\pi$, είναι διαιρετή δια 11, όπου s_α το άθροισμα των ψηφίων άρτιας θέσης και s_π το άθροισμα των ψηφίων περιττής θέσης.*

Π.χ. για τον αριθμό 917356 είναι $s_\alpha = 9 + 7 + 5 = 21$ και $s_{\pi\alpha} = 1 + 3 + 6 = 10$, οπότε $s_\alpha - s_\pi = 21 - 10 = 11 = \pi o\lambda 11$.

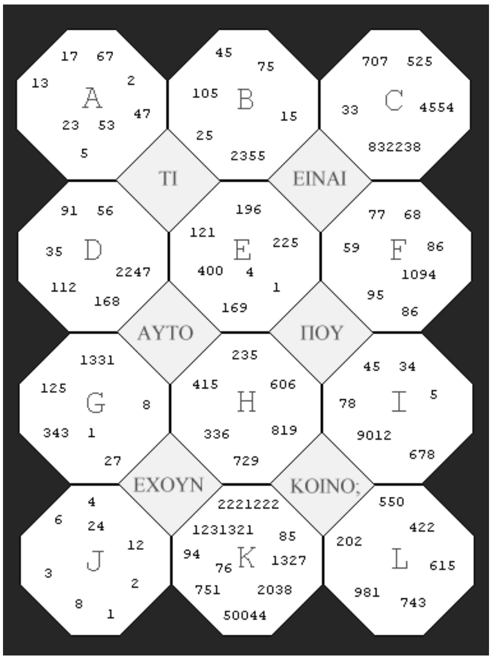
Πράγματι: $917356 = 11{\cdot}83396$.

Ο μεγαλύτερος ακέραιος με 10 διαφορετικά ψηφία είναι φυσικά ο 9876543210. Αυτός διαιρείται προφανώς με το 10 και σχεδόν προφανώς με το 9.

Δεν διαιρείται όμως με το 8, ούτε με το 11 (γιατί ;)

Αναδιατάξτε, μερικά από τα τελευταία ψηφία του αριθμού, ώστε να προκύψει αριθμός διαιρετός δια $8, 9, 10, 11$

ΑΣΚΗΣΗ 2 *(Προτείνει ο Γιώργος Απόκης) Οι αριθμοί σε καθένα από τα παρακάτω οκτάγωνα έχουν μια κοινή ιδιότητα. Βρείτε την!*



Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου

ΑΣΚΗΣΗ 3 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Ο καθηγητής των μαθηματικών είχε γράψει στον πίνακα μερικούς διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς για να γίνει το μάθημα της Ευκλείδειας διαίρεσης . Την άλλη ώρα,ένα μαθητής που δεν είχε πολύ όρεξη , παρατήρησε ότι αν προσθέσει όλα τα υπόλοιπα των ευκλείδειων διαιρέσεων των αριθμών αυτών με το 10 θα προκύψει άθροισμα ίσο με 22.*

Να βρείτε πόσοι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί ήταν γραμμένοι στον πίνακα.

ΑΣΚΗΣΗ 4 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός :*

$$N = \frac{2012}{\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{2012\cdot 2013}}$$

είναι φυσικός.

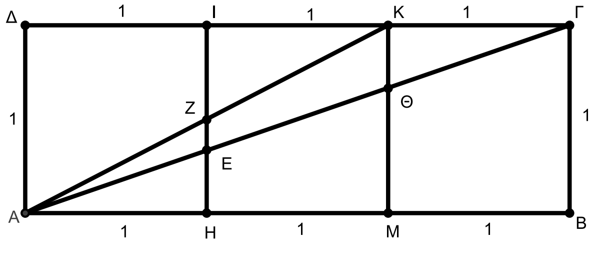
Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου

ΑΣΚΗΣΗ 5 *(Προτείνει ο KARKAR) Δύο δρομείς ξεκινούν ταυτόχρονα από τη θέση A , ακολουθώντας ο μεν ένας την ημικυκλική διαδρομή AB , ο δε άλλος την τεταρτοκυκλική AC . Σε κάποια στιγμή οι θέσεις τους S, T είναι στην ίδια ευθεία με το B . Ποιός δρομέας προηγείται , δηλαδή ποιός έχει να διανύσει τη λιγότερη απόσταση , έως ότου τερματίσει ;*

ΑΣΚΗΣΗ 6 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Πόσα ψηφία έχει ο αριθμός $a = 2^{2^5} \cdot 5^{5^2}$*

Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου

ΑΣΚΗΣΗ 7 *(Προτείνει ο Παναγιώτης Γιαννόπουλος) Στο σχήμα έχουμε τρία τετράγωνα πλευράς 1 τοποθετημένα το ένα δίπλα στο άλλο. Να βρεθεί το μήκος του τμήματος ΖΕ*



ΑΣΚΗΣΗ 8 *(Προτείνει ο Δημήτρης Ιωάννου) Σε ένα τρίγωνο ABC, οι πλευρές του a, b, c είναι ακέραιοι αριθμοί και επαληθεύουν τις παρακάτω σχέσεις:*

$$a^2 + c < 2a + b$$

$$b^2 + a < 2b + c$$

$$c^2 + b < 2c + a$$

Να βρείτε το είδος του τριγώνου ABC.

Μαθηματικά Α′ Λυκείου, Άλγεβρα

ΑΣΚΗΣΗ 9 *(Προτείνει ο Απόστολος Τιντινίδης) Για τους συντελεστές της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ισχύουν οι σχέσεις:*

$$|\alpha\gamma| > 0 \qquad (1)$$

$$|\alpha| + |\gamma| < |\beta| \qquad (2).$$

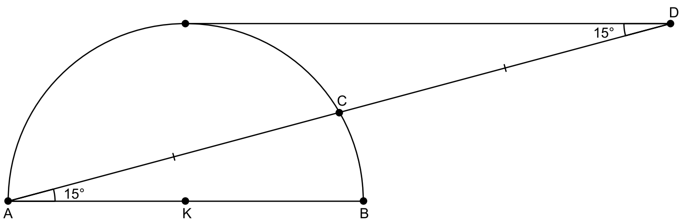
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες και ότι το πολύ μια απ′ αυτές είναι ακέραιος αριθμός.

ΑΣΚΗΣΗ 10 *(Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης) Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = ax^2 + bx + c$,*

όπου $a < b$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $P = \dfrac{a+b+c}{b-a}$.

Μαθηματικά Α′ Λυκείου, Γεωμετρία

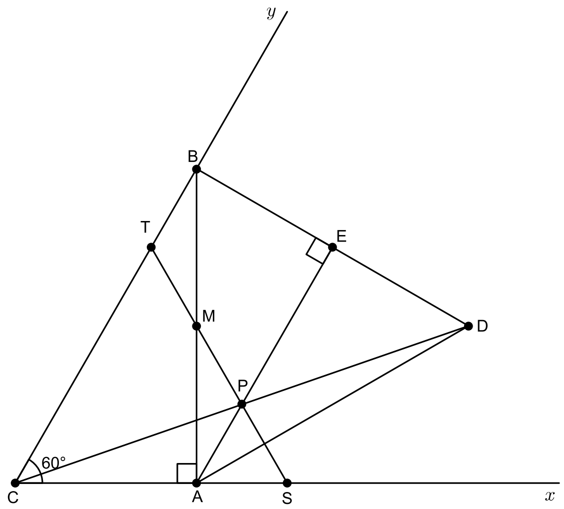
ΑΣΚΗΣΗ 11 *(Προτείνει ο Νίκος Φραγκάκης) Έστω ημικύκλιο κέντρου K και διαμέτρου AB. Επί του ημικυκλίου θεωρούμε σημείο C, τέτοιο ώστε $B\hat{A}C = 15^0$. Προεκτείνουμε το AC, πέραν του C, κατά τμήμα*
$CD = AC$. Να δειχθεί ότι η παράλληλη από το σημείο D προς την AB εφάπτεται του ημικυκλίου.



ΑΣΚΗΣΗ 12 *(Προτείνει ο Νίκος Φραγκάκης) Δίδεται γωνία $xCy = 60^0$. Από τυχαίο σημείο B της Cy φέρνουμε την απόσταση BA από την Cx. Κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ABD με τα C, D εκατέρωθεν της AB.*

1) Αν P το σημείο τομής της CD με το ύψος AE του ισοπλεύρου τριγώνου ABD, να δειχθεί ότι $AC = PE$.

2) Αν επί πλέον η ευθεία που ενώνει το P με το μέσο M του AB κόψει την Cx στο S και την Cy στο T, να δειχθεί ότι $TM = MP = PS$.



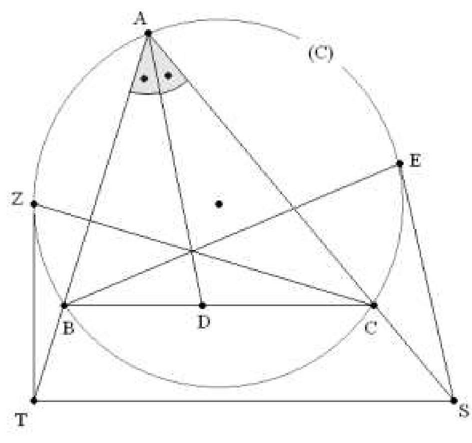
Μαθηματικά Β′ Λυκείου, Άλγεβρα

ΑΣΚΗΣΗ 13 *(Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης) Να λύσετε την εξίσωση: $\sqrt{2}(\sin t + \cos t) = \tan^3 t + \cot^3 t$.*

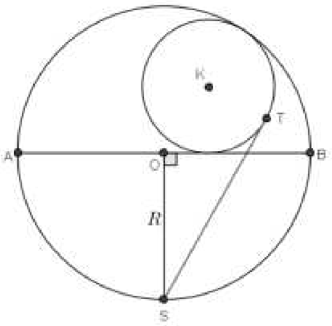
ΑΣΚΗΣΗ 14 *(Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης) Βρείτε όλα τα πολυώνυμα $P(x), Q(x)$ τέτοια ώστε*
$Q(x^2) = (x+1)^4 - x(P(x))^2$.

Μαθηματικά Β′ Λυκείου, Γεωμετρία

ΑΣΚΗΣΗ 15 *(Προτείνει ο Νίκος Φραγκάκης) Έστω τρίγωνο ABC με περίκυκλο (C) .*
Η παράλληλη προς την BC από σημείο T της προέκτασης της AB τέμνει την ευθεία AC στο σημείο S .
Φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα TZ, SE του (C).
Να δειχθεί ότι οι ευθείες BE, CZ και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ συντρέχουν.



ΑΣΚΗΣΗ 16 *(Προτείνει ο KARKAR) Στο βόρειο ημικύκλιο κάποιος κύκλος (K) εφάπτεται του (O, R) και της ισημερινής διαμέτρου . Υπολογίστε το εφαπτόμενο τμήμα ST .*



Μαθηματικά Β′ Λυκείου, Κατεύθυνση

ΑΣΚΗΣΗ 17 *(Προτείνει ο Γιώργος Κοτζαγιαννίδης) Να αποδείξετε ότι αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\alpha = 2\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma$, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.*

ΑΣΚΗΣΗ 18 *(Προτείνει ο Μιλτιάδης Μαγκαφάς) Δίνεται το σταθερό σημείο $A(a, b)$ με $a, b \neq 0$ και $a \neq -b$ και τα μεταβλητά σημεία $K(k, 0)$ και $\Lambda(0, \lambda)$ τέτοια ώστε $\vec{AK} \cdot \vec{A\Lambda} = \vec{OA}^2$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων.*
1) Να δείξετε ότι το μέσο του τμήματος ΚΛ κινείται σε σταθερή ευθεία (ε), η οποία είναι κάθετη στην ΟΑ.
2)Αν η ευθεία (ε) τέμνει την ευθεία $(\varepsilon_1) : x - y = 2$ στο σημείο P, έτσι ώστε $(OP) = \sqrt{2}$, τότε να δείξετε ότι το σημείο A βρίσκεται στην ευθεία $(\eta) : y = x$.

Μαθηματικά Γ′ Λυκείου, Γενική Παιδεία

ΑΣΚΗΣΗ 19 *(Προτείνει ο Μηνάς Χάτζος) Θεωρούμε το δείγμα με παρατηρήσεις (x_i): $0, 1, 2, ..., n$,$n \in \mathbb{N}^*$ το οποίο έχει διάμεσο $d = \dfrac{2k+1}{2}$,$k \in \mathbb{N}$.*

1. *Να αποδείξετε ότι ο n είναι περιττός*
2. *Να αποδείξετε ότι $n = 2k + 1$*
3. *Για $k = 2$ Να βρείτε την μέση τιμή των παρατηρήσεων.*
4. *Σχηματίζουμε τις παρατηρήσεις $y_i = ax_i + b$,$ab < 0$ τέτοιες ώστε $\overline{x} = \overline{y}$ και $s_y = s_x$ Να βρεθούν οι a, b.*

ΑΣΚΗΣΗ 20 *(Προτείνει ο Δημήτρης Μυρογιάννης) Θεωρούμε πείραμα τύχης με δειγματικό χώρο Ω και A ένα ενδεχόμενο αυτού.*

Να αποδείξετε ότι $[P(A)]^2 + [P(A')]^2 \geq \dfrac{1}{2}$.

Μαθηματικά Γ′ Λυκείου, Κατεύθυνση, Μιγαδικοί Αριθμοί

ΑΣΚΗΣΗ 21 *(Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας) Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z και w για τους οποίους ισχύουν*

$$|(1 + i)z - 2 - 4i| = \sqrt{18} \quad \text{και} \quad w = 2z - 11 + 5i.$$

Να βρείτε:

1. *Τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z*
2. *Την μέγιστη και ελάχιστη τιμή του $|z|$*
3. *Τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του w*
4. *Την μέγιστη και ελάχιστη τιμή του $|z - w|$*

ΑΣΚΗΣΗ 22 *(Προτείνει ο Νίκος Ζανταρίδης) Αν $z \in C$ και ισχύει $\left|z^2 + z + 1\right| = |z + 1|$,να δείξετε ότι:* $\mathrm{Re}(z) \in \left[-1, \frac{1}{3}\right]$.

Μαθηματικά Γ′ Λυκείου, Κατεύθυνση, Όρια, Συνέχεια

ΑΣΚΗΣΗ 23 *(Προτείνει ο Mulder) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ώστε για κάθε $c \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $f(x) = c$ να έχει ακριβώς δύο ρίζες.*

ΑΣΚΗΣΗ 24 *(Προτείνει ο Σπύρος Καρδαμίτσης)*

1. *Αν η συνάρτηση*
   f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$ και
   $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, να δείξετε ότι η συνάρτηση
   g με $g(x) = \frac{1}{f(x)} + f\left(\frac{1}{x}\right)$ είναι γνησίως φθίνουσα
   στο διάστημα $(0, +\infty)$.
2. *Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $h(x) = \frac{1}{e^x} + e^{\frac{1}{x}} - \ln x$*
3. *Να λύθει η ανίσωση $e^{-2x} + e^{\frac{1}{2x}} - \frac{1}{e} > \ln 2x + e$*

Μαθηματικά Γ′ Λυκείου, Κατεύθυνση, Διαφορικός Λογισμός

ΑΣΚΗΣΗ 25 *(Προτείνει ο Νίκος Ζανταρίδης) Να δειχθεί ότι:$e^x + e^{-x} + 2\cos x \geq 4, \forall x \in R$*

ΑΣΚΗΣΗ 26 *(Προτείνει ο Νίκος Ζανταρίδης) Για την παραγωγίσιμη και αύξουσα συνάρτηση $f : R \to R$*

ισχύει $f'(x) = f(x + 1) - 1, \forall x \in R$.Να βρεθεί ο τύπος της f.

Μαθηματικά Γ′ Λυκείου, Κατεύθυνση, Ολοκληρωτικός Λογισμός

ΑΣΚΗΣΗ 27 *(Προτάθηκε από το Νίκο Ζανταρίδη) Η συνάρτηση $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο. Να δειχθεί ότι*

$$\int_0^2 \left|\left(x^3 + x\right) f'(x) + \left(2x^2 + 2\right) f(x)\right| dx \geqslant 8f(2) .$$

ΑΣΚΗΣΗ 28 *(Προτάθηκε από τον Μπάμπη Στεργίου) Αν $0 < a \neq 1$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής και περιττή στο $\mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι :*

$$\int_{-1}^{1} f(x)\ln(1 + a^{f(x)})dx = \ln a \cdot \int_0^1 f^2(x)dx.$$

Μαθηματικά Γ′ Λυκείου, Κατεύθυνση, Ασκήσεις σε όλη την Ύλη

ΑΣΚΗΣΗ 29 *(Προτείνει ο ghan) Έστω* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *ώστε για κάθε* $x\in\mathbb{R}$ *να ισχύει:* $f(x)=\dfrac{2e^x}{1+f^2(x)}$.

α) Να βρεθεί η $f(0)$

β) Να δειχθεί ότι η f *είναι γνησίως αύξουσα*

γ) Να λυθεί η ανίσωση $\ln f(x)>0$.

ΑΣΚΗΣΗ 30 *(Προτείνει ο Θάνος Μάγκος) Δίνεται η συνάρτηση*

$$f(x)=\begin{cases}(x^2)^x, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$$

Μελετήστε την, ως προς τη συνέχεια

και την παραγωγισιμότητα.

Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου, Κατεύθυνση, Θέματα με Απαιτήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 31 *(προτάθηκε από τον Νίκο Ζανταρίδη) Να βρεθεί το οριο*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\int_1^x e^{t^3\sin(\frac{1}{t})-x^2}dt\right).$$

ΑΣΚΗΣΗ 32 *(προτάθηκε από τον Πέτρο Βαλλέτα) Έστω* $f,g:[0,1]\longrightarrow(0,\infty)$ *συνεχείς συναρτήσεις με*

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 g(x)\,dx=1\,.$$

Τότε, υπάρχει υποδιάστημα $[a,b]\subset[0,1]$ *ώστε:*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b g(x)\,dx=\frac{1}{2}\,.$$

Ασκήσεις μόνο για μαθητές

ΑΣΚΗΣΗ 33 *(Προτείνει ο Βασίλης Μαυροφρύδης) Να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης* $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ *που για κάθε* $x\in[0,+\infty)$ *ικανοποιεί την* $f(x)=x-\int_0^1\left(\sqrt{x}+\sqrt{f(t)}\right)^2dt$.

ΑΣΚΗΣΗ 34 *(Προτείνει ο parmenides51) Να βρείτε την συνεχή συνάρτηση* f *για την οποία ισχύει ότι*

$$f(x)-\int_0^1(x+y)f(y)dy=x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί Juniors, Άλγεβρα-Θεωρία Αριθμών-Συνδυαστική

ΑΣΚΗΣΗ 35 *(Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης) Να εξετάσετε αν υπάρχει ακέραιος* n *τέτοιος ώστε η εξίσωση* $x^4-2011x^2+n=0$ *να έχει 4 ακέραιες ρίζες.*

ΑΣΚΗΣΗ 36 *(Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης) Να βρείτε τις ακέραιες ρίζες της εξίσωσης*
$x^{2010}-2006=4y^{2009}+4y^{2008}+2007y$.

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί Juniors, Γεωμετρία

ΑΣΚΗΣΗ 37 *(Προτάθηκε από τον KARKAR) Δίνεται τετράπλευρο* $ABCD$ *εγγεγραμμένο σε κύκλο* (O) *και έστω τα σημεία* $S\equiv AB\cap CD$ *και* $T\equiv AC\cap BD$. *Οι κύκλοι που διέρχονται από τα* $A,\ T,\ D$ *και* $B,\ T,\ C$, *επανατέμνονται στο σημείο έστω* P. *Αποδείξτε ότι τα σημεία* $A,\ O,\ P,\ B$ *είναι ομοκυκλικά και ότι τα σημεία* $O,\ P,\ S$ *είναι συνευθειακά.*

ΑΣΚΗΣΗ 38 *(Προτάθηκε από τον erxmer) Στο τρίγωνο* $\triangle\ ABC$, *δίνονται οι γωνίες* $\angle BAC=30^o$ *και* $\angle ABC=70^o$. *Το σημείο* M *είναι εσωτερικό του τριγώνου ώστε να είναι* $\angle MAB=\angle MCA=20^o$. *Να ευρεθεί η γωνία* $\angle MBA$.

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί Seniors, Άλγεβρα-Θεωρία Αριθμών-Συνδυαστική

ΑΣΚΗΣΗ 39 *(Προτείνει ο Ευάγγελος Μουρούκος) Έστω* a,b,c *μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί, για τους οποίους ισχύει* $a+b+c=3$. *Να αποδείξετε ότι:*

$ab^2+bc^2+ca^2+abc\leq 4$.

Πότε ισχύει η ισότητα;

ΑΣΚΗΣΗ 40 *(Προτείνει ο Αλέξανδρος Μουσάτωφ) Έστω* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{N}^*$ *συνάρτηση έτσι ώστε*

$$f(x+\frac{1}{f(y)})=f(y+\frac{1}{f(x)})$$

για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. *Να δειχθεί ότι υπάρχει* $n\in\mathbb{N}^*$ *που δεν ανήκει στις τιμές της* f.

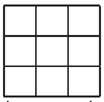
Μαθηματικοί Διαγωνισμοί Seniors, Γεωμετρία

ΑΣΚΗΣΗ 41 *(Προτάθηκε από το Γρηγόρη Κακλαμάνο) Έστω τετράγωνο* $ABCD$ *και* P, *τυχόν σημείο του ελάσσονος τόξου* $\overset{\frown}{AD}$ *του περιγεγραμμένου κύκλου του* (O), *με* $P\neq A\neq D$. *Έστω* $PR\parallel AD$ *με* $R\in AB$ *και* $PT\parallel AC$ *με* $T\in CD$. *Εάν* $S\equiv PB\cap AD$, *να αποδειχθεί ότι τα σημεία* $R,\ S,\ T$ *είναι συνευθειακά.*

ΑΣΚΗΣΗ 42 *(Προτάθηκε από τον Νίκο Φραγκάκη.) Έστω ορθογώνιο* $ABCD$ *διαστάσεων* $AB=a,\ BC=b$ *με* $a=b\sqrt{2}$. *Με διάμετρο το* CD *και έξω από το ορθογώνιο, γράφουμε ημικλύκλιο. Ένα σημείο* M, *κινείται πάνω στο ημικύκλιο και οι* $MA,\ MB$, *τέμνουν την* CD *στα σημεία* $K,\ L$, *αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την* AD *πέραν του* D *κατά τμήμα* $DZ=KC$ *και την* BC *πέραν του* C *κατά τμήμα* $CE=DL$. *Να αποδειχθεί ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου* $KLEZ$ *είναι σταθερό και να υπολογιστεί ως έκφραση του* a.

Θέματα Διαγωνισμών ΕΜΕ

ΑΣΚΗΣΗ 43 *(Προτείνει ο Παύλος Μαραγκουδάκης - Θέμα διαγωνισμού «Ο ΘΑΛΗΣ» Γ Γυμνασίου 1995) Δύο μαθητές Α και Β χρησιμοποιούν έναν πίνακα* 3×3*, όπως στο σχήμα, για να παίξουν*

'τρίλιζα'. 

Καθένας γράφει σ' ένα τετραγωνάκι της επιλογής του έναν σταυρό ή έναν κύκλο. Και οι δύο έχουν τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουν και το σταυρό και τον κύκλο, όποιο θέλουν σε κάθε τους κίνηση ανεξάρτητα με το τι χρησιμοποίησαν νωρίτερα. Θα νικήσει αυτός ο οποίος πρώτος γράφει ένα σύμβολο που είναι το ίδιο στα τρία τετράγωνα μιας γραμμής ή μιας στήλης ή μιας διαγωνίου του πίνακα. Για ποιον παίκτη υπάρχει σίγουρη στρατηγική νίκης·

ΑΣΚΗΣΗ 44 *(Προτείνει ο Αλέξανδρος Συγκελάκης- Θέμα 3ης Προκριματικής Φάσης Λυκείου 1995) Έστω* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ *όπου* n *άρτιος και* $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$*. Αν* $a_0 > 0$*,* $a_n > 0$ *και* $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2 \leq \dfrac{4\min\left(a_0^2, a_n^2\right)}{n-1}$ (1)*, να αποδείξετε ότι* $P(x) \geq 0$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$*.*

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί για Φοιτητές

ΑΣΚΗΣΗ 45 *(Από τον διαγωνισμό IMC του 2012) Ορίζουμε την ακολουθία* $a_0, a_1, \ldots$ *ως* $a_0 = 1$*,* $a_1 = \dfrac{1}{2}$ *και* $a_{n+1} = \dfrac{n a_n^2}{1 + (n+1)a_n}$ *για* $n \geq 1$*. Να δείξετε ότι η σειρά* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ *συγκλίνει και να βρείτε την τιμή της.*

ΑΣΚΗΣΗ 46 *(Από τον διαγωνισμό IMC του 2012) Είναι το σύνολο των θετικών ακεραίων* n *για τους οποίους ο αριθμός* $n! + 1$ *διαιρεί τον* $(2012n)!$*, πεπερασμένο ή άπειρο·*

Άλγεβρα ΑΕΙ

ΑΣΚΗΣΗ 47 *(Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης) Έστω ομάδα* G *με* n *στοιχεία και* $a, b \in G \setminus \{e\}$*,* $m \in \mathbb{N}$ *τέτοια ώστε* $ab = b^m a$*. Να δείξετε ότι* $b^{\frac{n}{(m,n)}} = e$*.*

ΑΣΚΗΣΗ 48 *(Προτείνει ο Σπύρος Καπελλίδης) Αν* G *είναι μία ομάδα τάξης* $2(2n+1)$*, (όπου* $n \in \mathbb{N}$*), να αποδειχθεί ότι έχει το πολύ μία υποομάδα τάξης* $2n+1$*.*

Ανάλυση ΑΕΙ

ΑΣΚΗΣΗ 49 *(Προτάθηκε από το Σεραφείμ Τσιπέλη) Να αποδειχθεί ότι*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{n^2+1} =$$

$$\arctan\left(\tan\left(\pi\sqrt{\tfrac{\sqrt{2}-1}{2}}\right) \frac{e^{\pi\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}} + e^{-\pi\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}}}{e^{\pi\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}} - e^{-\pi\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}}}\right) - \frac{\pi}{8}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 50 *(Προτάθηκε από το Σπύρο Καπελλίδη) Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει συνάρτηση* $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$*, για την οποία αληθεύει η συνεπαγωγή:*

$$x \in \mathbb{Q},\ y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \quad f(x)f(y) \leq |x - y|.$$

ΑΕΙ Μαθηματική Λογική και Θεμέλια Μαθηματικών

ΑΣΚΗΣΗ 51 *(Προτείνει ο Σπύρος Καπελλίδης) Έστω* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *μία γνησίως μονότονη συνάρτηση. Αν για τις μονότονες συναρτήσεις* $h, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ισχύει*

$$g(f(x)) = h(f(x)) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

να αποδειχθεί ότι $g = h$*.*

ΑΣΚΗΣΗ 52 *(Προτείνει ο Σπύρος Καπελλίδης) Να ορισθεί στο σύνολο των πραγματικών σχέση ολικής διάταξης, ώστε κάθε πραγματικός να έχει αμέσως προηγούμενο και αμέσως επόμενο.*

Θεωρία Αριθμών ΑΕΙ

ΑΣΚΗΣΗ 53 *(Προτείνει ο Γιώργος Παπαδόπουλος) Αν* n *είναι φυσικός περιττός, να βρεθούν τα δυο τελευταία ψηφία του* $2^{2n}\left(2^{2n+1} - 1\right)$*.*

ΑΣΚΗΣΗ 54 *(Προτείνει ο Γιώργος Παπαδόπουλος)*

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 +$$
$$+ \ldots + 2001^2 - 2002^2 + 2003^2 \equiv ? \pmod{2005}.$$

Ανώτερα Μαθηματικά

ΑΣΚΗΣΗ 55 *(Προτείνει ο Δημήτρης Χριστοφίδης) Να υπολογιστεί η πληθικότητα του συνόλου των μονότονων συναρτήσεων από το* $\mathbb{R}$ *στο* $\mathbb{R}$*.*

ΑΣΚΗΣΗ 56 *(Προτείνει ο Δημήτρης Σκουτέρης) Έστω* $S = \{a_1, a_2, a_3, ..., a\}$ *όπου* (a_n) *πραγματική ακολουθία* $1-1$ *με* $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$*.*
Αποδείξτε ότι το S *δε μπορεί να διαμεριστεί σε 2 ή περισσότερα ομοιομορφικά υποσύνολα (με τη συνήθη τοπολογία).*

Προτεινόμενα Θέματα Μαθηματικών (ΑΣΕΠ)

ΑΣΚΗΣΗ 57 *(Προτάθηκε από το Σπύρο Καπελλίδη) Έστω* $a, x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$ *και* $a \geq 2$*.*
Αν

$$A = cosx_1 + \frac{cosx_2}{a} + \frac{cosx_3}{a^2} + ... + \frac{cosx_n}{a^{n-1}}$$

και

$$B = sinx_1 + \frac{sinx_2}{a} + \frac{sinx_3}{a^2} + ... + \frac{sinx_n}{a^{n-1}},$$

να δειχθεί ότι $A^2 + B^2 > 0$*.*

ΑΣΚΗΣΗ 58 *(Προτάθηκε από τον Αθανάσιο Μάγκο) Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι* n*, για τους οποίους ισχύει*

$$\frac{\sin(na)}{\sin a} - \frac{\cos(na)}{\cos a} = n - 1,$$

για κάθε $a \neq \dfrac{k\pi}{2}$*,* $k \in \mathbb{Z}$*.*

Ο Φάκελος του καθηγητή, Γεωμετρία

ΑΣΚΗΣΗ 59 *(Προτείνει ο erxmer) Σε δεδομένο τρίγωνο ABC φέρνουμε τον περιγεγραμμένο κύκλο (C_1, R) και τον εγγεγραμμενο (C_2, r). Αν ονομάσουμε d την απόσταση μεταξύ των κέντρων των κύκλων αυτών, είναι γνωστό (Euler) ότι $R^2 - 2Rr = d^2$.*
Ισχύει το αντίστροφο;

ΑΣΚΗΣΗ 60 *(Προτείνει ο Δημήτρης Ιωάννου) Αν η ακμή ενός κύβου είναι a, να υπολογίσετε την ελάχιστη απόσταση μιας διαγωνίου του κύβου και της διαγωνίου μιας έδρας του κύβου που είναι ασύμβατη με την διαγώνιο του κύβου.*

Ο Φάκελος του καθηγητή, Άλγεβρα

ΑΣΚΗΣΗ 61 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Αν ο z διατρέχει το σύνολο των μιγαδικών, να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της παράστασης*

$$A = |z^2 + z + 1| + |z^2 - z + 1|$$

ΑΣΚΗΣΗ 62 *(Προτείνει ο Χρήστος Κυριαζής) Έστω τα διανύσματα:*

$$\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2},\ \ldots..,\overrightarrow{a_n}$$

μέτρου το πολύ ένα. Αν

$$\overrightarrow{c} = \pm\overrightarrow{a_1} \pm \overrightarrow{a_2} \pm \ldots.. \pm \overrightarrow{a_n}$$

να δείξετε πως με κατάλληλη επιλογή των προσήμων μπορεί να ισχύει:

$$\left|\overrightarrow{c}\right| \leq \sqrt{2}$$

Οι Ασκήσεις και Οι Λύσεις

Διασκεδαστικά Μαθηματικά

Επιμελητής: Γιώργος Ρίζος

ΑΣΚΗΣΗ 1 *(Προτείνει ο KARKAR) Λήμμα : Ένας ακέραιος είναι διαιρετός δια του 11, αν η διαφορά $s_\alpha - s_\pi$, είναι διαιρετή δια 11, όπου s_α το άθροισμα των ψηφίων άρτιας θέσης και s_π το άθροισμα των ψηφίων περιττής θέσης.*

Π.χ. για τον αριθμό 917356 *είναι* $s_\alpha = 9 + 7 + 5 = 21$ *και* $s_{\pi\alpha} = 1+3+6 = 10$, *οπότε* $s_\alpha - s_\pi = 21 - 10 = 11 = \pi o\lambda 11$.

Πράγματι: 917356 = 11·83396.

Ο μεγαλύτερος ακέραιος με 10 *διαφορετικά ψηφία είναι φυσικά ο* 9876543210. *Αυτός διαιρείται προφανώς με το* 10 *και σχεδόν προφανώς με το* 9.

Δεν διαιρείται όμως με το 8, *ούτε με το* 11 *(γιατί ;)*

Αναδιατάξτε, μερικά από τα τελευταία ψηφία του αριθμού, ώστε να προκύψει αριθμός διαιρετός δια $8, 9, 10, 11$

---

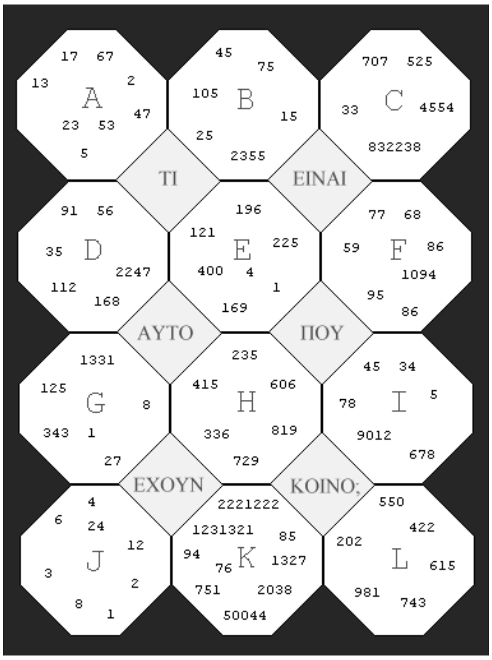
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=44&t=20063

Λύση (Δημήτρης Ιωάννου) Αρχικά θα πρέπει το τελευταίο ψηφίο να παραμείνει το μηδέν. Για να διαιρείται με το 8, θα πρέπει να διαιρείται αρχικά με το 4. Αφού πρέπει να μεταθέσουμε τα ψηφία από το τέλος, δοκιμάζουμε να βάλουμε το 2 ή το 4 ως ψηφίο των δεκάδων , ώστε ο αρθμός μας να διαιρείται με το 4. Αφήνοντας τα πρώτα ψηφία απείραχτα, έχουμε δύο πιθανές περιπτώσεις:

1η Περίπτωση: Ο ζητούμενος αριθμός να είναι ο $98765kmn$, όπου $k, m, n \epsilon \{1, 4, 3\}$. Τότε όμως θα έπρεπε $9+7+5+m+2-8-6-k-n$ να είναι πολλαπλάσιο του 11. Δηλαδή $9 + m - k - n$ να είναι πολλαπλάσιο του 11. Άρα $m-k-n = 2$, πράγμα άτοπο αφού τα $k, m, n \epsilon \{1, 4, 3\}$

2η Περίπτωση: Ο ζητούμενος αριθμός να είναι ο $98765kmn40$, όπου $k, m, n \epsilon \{1, 2, 3\}$ Για να διαιρείται με το 11 θα πρέπει $9 + 7 + 5 + m + 4 - 8 - 6 - k - n$ να είναι πολ/σιο του 11, δηλαδή $11 + m - k - n$ να είναι πολ/σιο του 11 οπότε πρέπει $m-k-n = 0$ που αυτό γίνεται όταν $m = 3, k = 2, n = 1$ ή $m = 3, k = 1, n = 2$. Άρα οι πιθανοί αριθμοί που ζητάμε είναι οι 9876523140 ή 9876513240. Από αυτούς ο μόνος που εκτός του $10, 9, 11$ διαιρείται και με το 8 είναι ο 9876513240

ΑΣΚΗΣΗ 2 *(Προτείνει ο Γιώργος Απόκης) Οι αριθμοί σε καθένα από τα παρακάτω οκτάγωνα έχουν μια κοινή ιδιότητα. Βρείτε την!*



http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=44&t=22167

Λύση (Δημήτρης Χριστοφίδης)

A: πρώτοι αριθμοί.

B: πολλαπλάσια του 5.

C: καρκινικοί αριθμοί.

D : πολλαπλάσια του 7.

E : τέλεια τετράγωνα.

F : άθροισμα ψηφίων ίσο με 14.

G : τέλειοι κύβοι, J : διαιρέτες του 24.

H: Το άθροισμα του πρώτου από δεξιά ψηφίου ισούται με το άθροισμα των υπολοίπων ψηφίων.

I: Κάθε αριθμός αποτελείται από συνεχόμενα ψηφία του αριθμού 9012345678.

K: Άθροισμα ψηφίων 13.

L: Το άθροισμα του πρώτου από αριστερά ψηφίου ισούται με το άθροισμα των υπολοίπων ψηφίων.

Επιμελητής: Μπάμπης Στεργίου

ΑΣΚΗΣΗ 3 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Ο καθηγητής των μαθηματικών είχε γράψει στον πίνακα μερικούς διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς για να γίνει το μάθημα της Ευκλείδειας διαίρεσης .*
Την άλλη ώρα,ένα μαθητής που δεν είχε πολύ όρεξη , παρατήρησε ότι αν προσθέσει όλα τα υπόλοιπα των ευκλείδειων διαιρέσεων των αριθμών αυτών με το 10 θα προκύψει άθροισμα ίσο με 22.

Να βρείτε πόσοι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί ήταν γραμμένοι στον πίνακα.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=33&t=31086

Λύση (Φωτεινή Καλδή) Τα δυνατά υπόλοιπα των διαιρέσεων με το 10 είναι: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$

οι αριθμοί που είναι γραμμένοι στον πίνακα είναι διαδοχικοί φυσικοί

επομένως το ίδιο θα ισχύει και για τα υπόλοιπα

εφόσον έχουν άθροισμα 22 ,τα υπόλοιπα είναι: $4, 5, 6, 7$ και μόνο αυτά,

γιατί κάνοντας δοκιμές με τ΄ άλλα υπόλοιπα δεν έχουμε αυτό το άθροισμα

άρα είναι 4 διαδοχικοί φυσικοί γραμμένοι στον πίνακα.

ΑΣΚΗΣΗ 4 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός :*

$$N = \frac{2012}{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{2012\cdot 2013}}$$

είναι φυσικός.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=33&t=30872

Λύση (Λευτέρης Πρωτοπαπάς)

$$N = \frac{2012}{\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2012}-\frac{1}{2013}} =$$

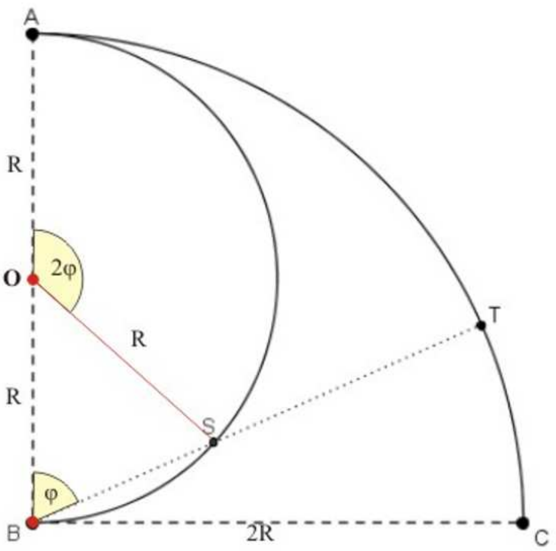
$$= \frac{2012}{\frac{1}{1}-\frac{1}{2013}} = \frac{2012}{\frac{2012}{2013}} = 2013, \text{ που είναι φυσικός.}$$

Επιμελητής: Σωτήρης Στόγιας

ΑΣΚΗΣΗ 5 *(Προτείνει ο KARKAR) Δύο δρομείς ξεκινούν ταυτόχρονα από τη θέση A , ακολουθώντας ο μεν ένας την ημικυκλική διαδρομή AB , ο δε άλλος την τεταρτοκυκλική AC . Σε κάποια στιγμή οι θέσεις τους S, T είναι στην ίδια ευθεία με το B . Ποιός δρομέας προηγείται , δηλαδή ποιός έχει να διανύσει τη λιγότερη απόσταση , έως ότου τερματίσει ;*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=34&t=30934

Λύση (Γιώργος Ρίζος).



Το τεταρτοκύκλιο (B, AC) έχει ακτίνα $2R$, οπότε $(AC) = \dfrac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 2R = \pi \cdot R$

Το ημικύκλιο AB του κύκλου (O, R) έχει μήκος $(AB) = \dfrac{1}{2} \cdot 2\pi R = \pi R$, οπότε οι διαδρομές είναι ίσες.

Στο ισοσκελές τρίγωνο BOS η γωνία $\widehat{AOS}$ είναι εξωτερική των ίσων $\widehat{OBS}$, $\widehat{BSO}$,

άρα είναι διπλάσια της $\widehat{OBS}$.

Είναι $(AS) = \dfrac{\pi \cdot R \cdot 2\phi}{180^\circ} = \dfrac{\pi \cdot R \cdot \phi}{90^\circ}$ και

$(\mathrm{AT}) = \dfrac{\pi \cdot 2R \cdot \phi}{180^\circ} = \dfrac{\pi \cdot R \cdot \phi}{90^\circ}$,

δηλαδή έχουν διανύσει ίση απόσταση άρα έχουν ακόμα ίσες διαδρομές να διανύσουν.

Κανείς δεν προηγείται, με την προϋπόθεση, βέβαια, ότι κινούνται με την ίδια ταχύτητα.

ΑΣΚΗΣΗ 6 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Πόσα ψηφία έχει ο αριθμός $a = 2^{2^5} \cdot 5^{5^2}$*

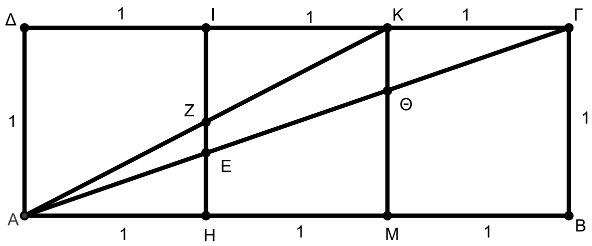
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=34&t=27337

Λύση (Γιώργος Απόκης) Είναι : $a = 2^{2^5} \cdot 5^{5^2} = 2^{32} \cdot 5^{25} =$

$$2^{25} \cdot 2^7 \cdot 5^{25} = (2 \cdot 5)^{25} \cdot 2^7 = 10^{25} \cdot 2^7 = 128 \cdot 10^{25}$$

δηλαδή ισούται με το 128 ακολουθούμενο από 25 μηδενικά, έτσι έχει 28 ψηφία.

ΑΣΚΗΣΗ 7 *(Προτείνει ο Παναγιώτης Γιαννόπουλος) Στο σχήμα έχουμε τρία τετράγωνα πλευράς 1 τοποθετημένα το ένα δίπλα στο άλλο. Να βρεθεί το μήκος του τμήματος ΖΕ*



http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=35&t=19335

Λύση 1 (Παύλος Μαραγκουδάκης) Ας ονομάσουμε Θ το σημείο τομής των τμημάτων $A\Gamma$ και KM.

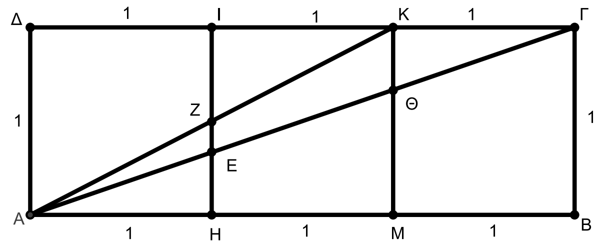
Τότε το τμήμα ZE είναι το μισό του $K\Theta$.

Τα τρίγωνα $K\Theta\Gamma$ και $A\Delta\Gamma$ είναι όμοια.

Άρα $K\Theta = \frac{1}{3}$.

Επομένως $ZE = \frac{1}{6}$.

Λύση 2(*Parmenides*51)



Έστω Θ το σημείο τομής των τμημάτων $A\Gamma$,KM και H το σημείο τομής των τμημάτων AB ,ZE.

$EH = K\Theta$ (1) διότι αν περιστρέψουμε κατά 180° γύρω από το κέντρο του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ το τρίγωνο $AB\Gamma$ προκύπτει πως $A \equiv \Gamma, B \equiv \Delta, H \equiv K, E \equiv \Theta$.

$ZH = \frac{KM}{2}$ (2) και Z μέσο του AK (3) διότι στο τρίγωνο AKM ισχύει πως

$ZH//KM$ και H μέσο του AM.

$ZE = \frac{K\Theta}{2}$ (4) διότι στο τρίγωνο $AK\Theta$ ισχύει πως $EZ//K\Theta$ και Z μέσο του AK λόγω (3).

$$ZH = ZE + EH \overset{(1),(2),(4)}{\Rightarrow} \frac{KM}{2} = \frac{K\Theta}{2} + K\Theta \Rightarrow$$

$$\frac{KM}{2} = \frac{3K\Theta}{2} \Rightarrow K\Theta = \frac{KM}{3}$$

$$\text{Άρα } ZE = \frac{K\Theta}{2} = \frac{\frac{KM}{3}}{2} = \frac{KM}{6} = \frac{1}{6}$$

ΑΣΚΗΣΗ 8 *(Προτείνει ο Δημήτρης Ιωάννου) Σε ένα τρίγωνο ABC, οι πλευρές του a, b, c είναι ακέραιοι αριθμοί και επαληθεύουν τις παρακάτω σχέσεις:*

$$a^2 + c < 2a + b$$

$$b^2 + a < 2b + c$$

$$c^2 + b < 2c + a$$

Να βρείτε το είδος του τριγώνου ABC.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=35&p=103474#p103474

Λύση (Αχιλλέας Συνεφακόπουλος) Από τις υποθέσεις έχουμε

$(a-1)^2 = a^2 - 2a + 1 \le b - c$,

$(b-1)^2 = b^2 - 2b + 1 \le c - a$,

και

$(c-1)^2 = c^2 - 2c + 1 \le a - b$.

Προσθέτοντας κατά μέλη τις τελευταίες τρεις ανισότητες παίρνουμε

$(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \le$

$(b-c) + (c-a) + (a-b) = 0$.

Συνεπώς, $a = b = c = 1$.

Το τρίγωνο, λοιπόν, είναι ισόπλευρο με κάθε πλευρά του ίση με 1.

Μαθηματικά Α' Λυκείου ('Αλγεβρα)

Επιμελητής: Στράτης Αντωνέας

ΑΣΚΗΣΗ 9 *(Προτείνει ο Απόστολος Τιντινίδης) Για τους συντελεστές της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ ισχύουν οι σχέσεις:*

$$|\alpha\gamma|>0 \qquad (1)$$
$$|\alpha|+|\gamma|<|\beta| \qquad (2).$$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες και ότι το πολύ μια απ΄ αυτές είναι ακέραιος αριθμός.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=19&t=27655

Λύση (Κώστας Καπένης) Έστω ότι $D\le 0\Rightarrow b^2\le 4ac$

Τότε από το δεδομένο προκύπτει $a^2+c^2+2|ac|<4ac$.

Αν a,c ετερόσημοι τότε γνωρίζουμε ότι θα είχε 2 άνισες πραγματικές ρίζες. Αν a,c ομόσημοι τότε συνεχίζοντας προκύπτει:

$a^2+c^2+2ac<4ac\Rightarrow(a-c)^2<0$, ασφαλώς άτοπο. Άρα η εξίσωση έχει 2 άνισες ρίζες.

Έστω ότι και οι δύο λύσεις είναι ακέραιοι. Τότε:

$|a|+|c|<|b|\Rightarrow 1+|x_1x_2|<|x_1+x_2|<|x_1|+|x_2|\Rightarrow (1-|x_2|)(|x_1|-1)>0$

το οποίο είναι άτοπο αφού οι απόλυτες τιμές των ριζών είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 1.

Και αυτό γιατί η εξίσωση δεν έχει μηδενική λύση, αφού διαφορετικά θα είχαμε $c=0$ που το απαγορεύει η σχέση $|ac|>0$.

ΑΣΚΗΣΗ 10 *(Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης) Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x)=ax^2+bx+c$,*

όπου $a<b$ και $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $P=\dfrac{a+b+c}{b-a}$.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=19&t=30621

Λύση 1 (Νίκος Ζανταρίδης) Για να ισχύει

$ax^2+bx+c\ge 0, \forall x\in\mathbb{R}$ πρέπει και αρκεί να είναι

$(a=b=0\ ,\ \ c\ge 0)$ ή $\left(a>0, b^2-4ac\le 0\right)$.

Επειδή όμως δόθηκε $a<b$ συμπεραίνουμε ότι είναι $0<a<b$ και $b^2-4ac\le 0$, οπότε ισχύει $c\ge\dfrac{b^2}{4a}$.

Ετσι έχουμε

$$P=\frac{a+b+c}{b-a}\ge\frac{a+b+\frac{b^2}{4a}}{b-a}=$$
$$\frac{b^2+4ab+4a^2}{4a(b-a)}=\frac{b}{4a}+\frac{5}{4}+\frac{9a}{4(b-a)}=$$
$$=\frac{b-a}{4a}+\frac{9a}{4(b-a)}+\frac{3}{2}\ge$$
$$2\sqrt{\left(\frac{b-a}{4a}\right)\left(\frac{9a}{4(b-a)}\right)}+\frac{3}{2}=3\ ,$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν

$$\left\{\frac{b-a}{4a}=\frac{9a}{4(b-a)}\wedge c=\frac{b^2}{4a}\wedge a>0\right\}\Leftrightarrow$$
$$b=c=4a>0.$$

Άρα $P_{\min}=3$.

Λύση 2 (Χρήστος Κυριαζής) Όπως στην προηγούμενη λύση είναι:

$$0<a<b \text{ και } c\ge\frac{b^2}{4a}.$$

$$P=\frac{b+c+a}{b-a}=$$

$$\frac{\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+1}{\frac{b}{a}-1}\overset{\frac{c}{a}\ge\left(\frac{b}{2a}\right)^2}{\ge}\frac{\frac{b}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+1}{\frac{b}{a}-1}=\frac{\left(\frac{b}{2a}+1\right)^2}{\frac{b}{a}-1}$$

Θέτω : $\frac{b}{a} = x > 1$ κι έχουμε:

$$P \geq \frac{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2}{x-1} = \frac{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2}{2\frac{x}{2}-1} \overset{y=\frac{x}{2}, y>\frac{1}{2}}{=} \frac{(y+1)^2}{2y-1} =$$

$$\frac{(y+1)^2}{2(y+1)-3} \overset{w=y+1, w>\frac{3}{2}}{=} \frac{w^2}{2w-3}$$

Όμως: $(w-3)^2 \geq 0, w > \frac{3}{2} \Leftrightarrow w^2 \geq 6w-9 = 3(2w-3), w > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{w^2}{(2w-3)} \geq 3, w > \frac{3}{2}$

Επομένως:

$P \geq 3$

Η ισότητα αληθεύει αν και μόνον αν

$w = 3 \Leftrightarrow y+1 = 3 \Leftrightarrow y = 2 \Leftrightarrow x = 4 \Leftrightarrow \frac{b}{a} = 4 \Leftrightarrow b = 4a$ αλλά και $\frac{c}{a} = \frac{16a^2}{4a^2} \Leftrightarrow c = 4a$.

Λύση 3 (Γιώργος Ροδόπουλος) Όμοια ισχύουν οι σχέσεις:

$b > a > 0 \ \ \textit{και} \ \ 4ac \geq b^2$. Έχουμε:

$(b-c)^2 \geq 0 \Rightarrow b^2 - 2bc + c^2 \geq 0 \Rightarrow b^2 \geq 2bc - c^2 \Rightarrow$

$4ac \geq 2bc - c^2 \Rightarrow 4a \geq 2b - c$

$\Rightarrow 2a + c \geq 2(b-a) \Rightarrow \frac{2a+c}{b-a} \geq 2 \Rightarrow$

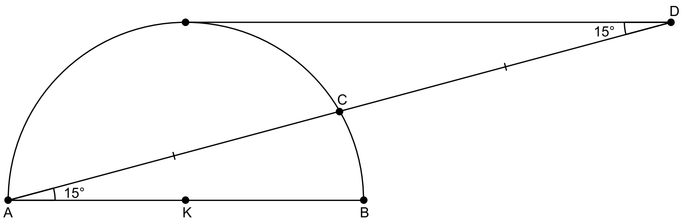
$\frac{2a+c}{b-a} + 1 \geq 3 \Rightarrow \frac{a+b+c}{b-a} \geq 3$

με την ισότητα να ισχύει όταν

$b - c = 0 \ \ \textit{και} \ \ b^2 = 4ac \Rightarrow b = c = 4a.$

Επιμελητής: Μιχάλης Νάννος

ΑΣΚΗΣΗ 11 *(Προτείνει ο Νίκος Φραγκάκης) Έστω ημικύκλιο κέντρου K και διαμέτρου AB. Επί του ημικυκλίου θεωρούμε σημείο C, τέτοιο ώστε $B\hat{A}C = 15^0$. Προεκτείνουμε το AC, πέραν του C, κατά τμήμα $CD = AC$. Να δειχθεί ότι η παράλληλη από το σημείο D προς την AB εφάπτεται του ημικυκλίου.*



http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=20&t=30565

Λύση (Στάθης Κούτρας) Ας είναι $DD' \perp AB \,(D' \in AB)$.

Τότε με $\widehat{ACB} \overset{\text{εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο}}{=} 90^0 \overset{AC=CD}{\Rightarrow} ABD$

ισοσκελές (BC ύψος και διάμεσος),

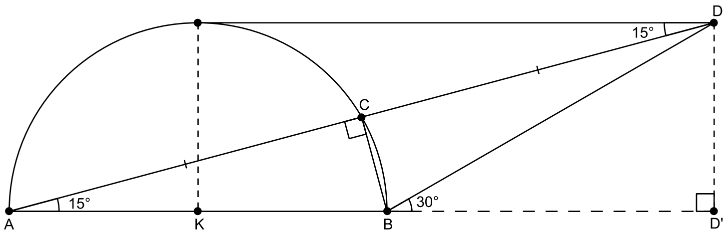
άρα $BD = AB = 2R$ και

$\widehat{D'BD} \overset{\text{εξωτερική ισοσκελούς}}{=} 2\widehat{BAC} \overset{\widehat{BAC}=15^0}{=} \widehat{D'BD} =$

$30^0 \overset{DD'B \text{ ορθογώνιο στο } D'}{\Rightarrow} DD' = \dfrac{BD}{2} \overset{BD=AB=2R}{\Rightarrow}$

$DD' = R$

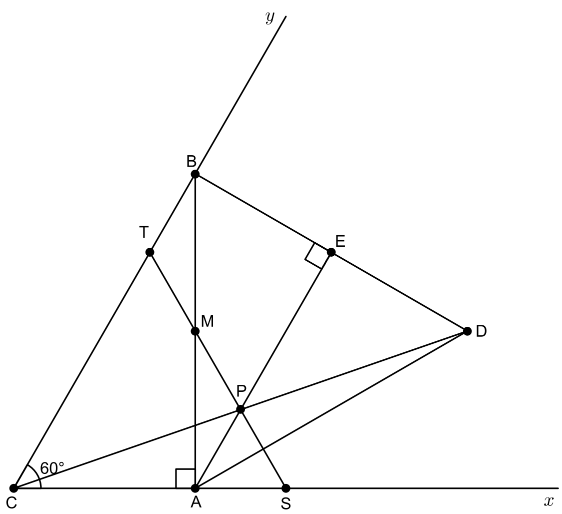
συνεπώς η παράλληλη από το D στην AB εφάπτεται του ημικυκλίου και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.



ΑΣΚΗΣΗ 12 *(Προτείνει ο Νίκος Φραγκάκης) Δίδεται γωνία $xCy = 60^0$. Από τυχαίο σημείο B της Cy φέρνουμε την απόσταση BA από την Cx. Κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ABD με τα C, D εκατέρωθεν της AB.*

1) Αν P το σημείο τομής της CD με το ύψος AE του ισοπλεύρου τριγώνου ABD, να δειχθεί ότι $AC = PE$.

2) Αν επί πλέον η ευθεία που ενώνει το P με το μέσο M του AB κόψει την Cx στο S και την Cy στο T, να δειχθεί ότι $TM = MP = PS$.



http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=20&t=30530

Λύση (Κώστας Δόρτσιος) 1) Επειδή η $\widehat{ACB}$ είναι 60^o θα είναι: $AC = \dfrac{BC}{2}$ (1).

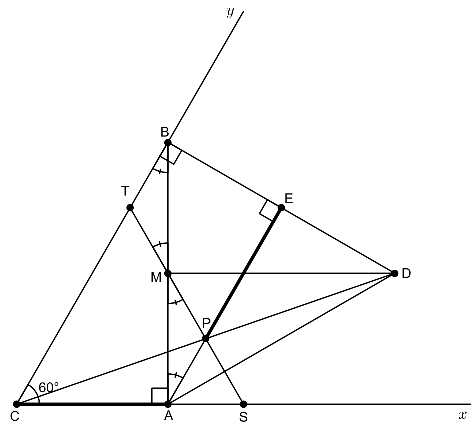
Ακόμα επειδή οι AE, CB είναι παράλληλες και το E μέσο της BD θα είναι και P μέσο της CD κι ακόμα: $EP = \frac{BC}{2}$ (2). Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $AC = EP$.

2) Επειδή οι DM και AC είναι παράλληλες και το P μέσο της CD, τότε το P θα είναι και μέσο της MS, δηλαδή: $MP = PS$ (3).

Επίσης τα τρίγωνα BMT και AMP είναι ίσα γιατί $AM = MB$ και οι προσκείμενες σ′ αυτές γωνίες είναι ίσες, άρα $TM = MP$ (4).

Από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει

$TM = MP = PS$.



Επιμελητής: Φωτεινή Καλδή

ΑΣΚΗΣΗ 13 *(Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης) Να λύσετε την εξίσωση:* $\sqrt{2}(\sin t + \cos t) = \tan^3 t + \cot^3 t$.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=21&t=28422

Λύση 1 (Θάνος Μάγκος)

Έστω t λύση της εξίσωσης.

Επειδή $\sin t + \cos t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

είναι $\sqrt{2}(\sin t + \cos t) \in [-2, 2]$

άρα

$-2 \leq \tan^3 t + \cot^3 t \leq 2$.

Όμως, το άθροισμα δύο αντίστροφων αριθμών είναι τουλάχιστον 2, όταν, αυτοί είναι θετικοί, ενώ είναι το πολύ -2, όταν είναι αρνητικοί.

Άρα

$\tan^3 t + \cot^3 t = 2 \implies \tan t = 1 \implies t = k\pi + \dfrac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$,

ή

$\tan^3 t + \cot^3 t = -2 \implies \tan t = -1 \implies$

$t = k\pi - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$,

Η 2η οικογένεια δεν ικανοποιεί την εξίσωση, ενώ με επαλήθευση, από την πρώτη κρατάμε εκείνες που έχουν k άρτιο.

Λύση 2 ($BAGGP93$)

Περιορισμοί εξίσωσης

$t \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}, t \neq k\pi$,όπου $k \in \mathbb{Z}$

Είναι

$\tan^3 t + cot^3 t = (tant + cott)((tant + cott)^2 - 3) = (tant + cott)^3 - 3(tant + cott)$

Όμως

$$tant + cott = \frac{sint}{cost} + \frac{cost}{sint} = \frac{sin^2 t + cos^2 t}{sintcost} = \frac{2}{sin(2t)}$$

και άρα $\tan^3 t + cot^3 t = \dfrac{8}{sin^3(2t)} - \dfrac{6}{sin(2t)}$

Υψώνοντας στο τετράγωνο την αρχική έχουμε

$$2sin^t + 2cos^2 t + 2sin(2t) = \frac{64}{sin^6(2t)} - \frac{96}{sin^4(2t)} + \frac{36}{sin^2(2t)}$$

και άρα

$2sin^6(2t) + 2sin^7(2t) = 64 - 96sin^3(2t) + 36sin^4(2t) \quad \Rightarrow$

$2sin^7(2t) + 2sin^6(2t) - 36sin^4(2t) + 96sin^3(2t) - 64 = 0$

Θεωρούμε το πολυώνυμο

$P(t) = 2t^7 + 2t^6 - 36t^4 + 96t^3 - 64, t \in [-1, 1]$

Προφανώς $P(1) = 0$ και άρα από Ευκλείδεια Διαίρεση βρίσκουμε

$P(t) = (t-1)(2t^6 + 4t^5 + 4t^4 - 32t^3 - 32t^2 + 64), t \in [-1, 1]$

$2t^6 + 4t^5 + 4t^4 - 32t^3 - 32t^2 + 64 =$

$2t^4(t^2 + 2t + 2) + 32(1 - t^3) + 32(1 - t^2) > 0 \ \forall t \in [-1, 1]$

Έτσι,$sin(2t) = 1 \Rightarrow 2t = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = k\pi + \dfrac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$

Κρατάμε τα άρτια k

ΑΣΚΗΣΗ 14 *(Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης) Βρείτε όλα τα πολυώνυμα $P(x), Q(x)$ τέτοια ώστε* $Q(x^2) = (x+1)^4 - x(P(x))^2$.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=21&t=28418

Λύση (Αλέξανδρος Συγκελάκης) Έστω $\deg Q = n$ και $\deg P = m$.

Αν ήταν $m \geq 2$ τότε συγκρίνοντας τους βαθμούς από τη δοσμένη σχέση πρέπει να ισχύει $2n = 2m + 1$, άτοπο.

Άρα $m = 0$ ή $m = 1$

Αν ήταν $m = 0$ τότε $P(x) = c$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και τότε η αρχική σχέση γίνεται:

$Q(x^2) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + (4 - c^2)x + 1$, άτοπο διότι το αριστερό μέλος είναι πολυώνυμο που έχει μόνο άρτιες δυνάμεις του x.

Αν ήταν $m = 1$ τότε $P(x) = ax + b$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και τότε η αρχική σχέση γίνεται:

$Q(x^2) = x^4 + (4 - a^2)x^3 + (6 - 2ab)x^2 + (4 - b^2)x + 1$

Για να αποτελείται το δεύτερο μέλος της παραπάνω ισότητας μόνο από άρτιες δυνάμεις του x θα πρέπει $a^2 = b^2 = 4$ απ΄ όπου προκύπτουν 4 ζεύγη (a, b).

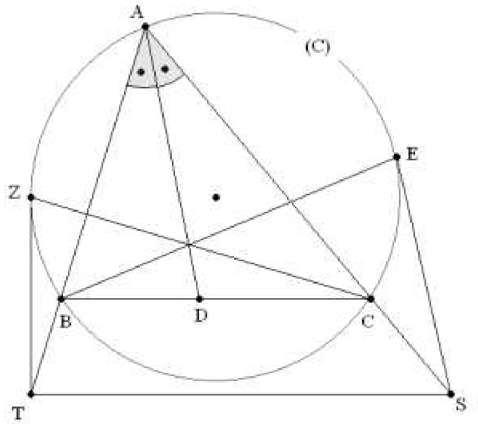
Αν $P(x) = 2x + 2$ είτε $P(x) = -2x - 2$ τότε

$Q(x^2) = x^4 - 2x^2 + 1$ άρα $Q(x) = x^2 - 2x + 1$.

Αν $P(x) = 2x - 2$ είτε $P(x) = -2x + 2$ τότε

$Q(x^2) = x^4 + 14x^2 + 1$ άρα $Q(x) = x^2 + 14x + 1$.

ΑΣΚΗΣΗ 15 *(Προτείνει ο Νίκος Φραγκάκης) Έστω τρίγωνο ABC με περίκυκλο (C) .*
Η παράλληλη προς την BC από σημείο T της προέκτασης της AB τέμνει την ευθεία AC στο σημείο S .
Φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα TZ, SE του (C).
Να δειχθεί ότι οι ευθείες BE, CZ και η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ συντρέχουν.



http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=22&t=31113

Λύση 1 (Γρηγόρης Κακλαμάνος) Ισχύει

$$\frac{sin\widehat{CBE}}{sin\widehat{ABE}} = \frac{sin\widehat{CES}}{sin\widehat{ACE}} = \frac{sin\widehat{CES}}{sin\widehat{ECS}} = \frac{CS}{ES} \text{ και}$$

$$\frac{sin\widehat{ACZ}}{sin\widehat{BCZ}} = \frac{sin\widehat{ZBA}}{sin\widehat{TZB}} = \frac{sin\widehat{ZBT}}{sin\widehat{TZB}} = \frac{ZT}{BT}.$$

Ισχύει

$$\frac{ES^2}{ZT^2} = \frac{SC \cdot SA}{TB \cdot TA} \overset{BC\|TS}{\Rightarrow} \frac{ES^2}{ZT^2} = \frac{SC^2}{TB^2} \Rightarrow \frac{CS}{ES} \cdot \frac{ZT}{BT} = 1.$$

Συνεπώς είναι

$$\frac{sin\frac{\hat{A}}{2}}{sin\frac{\hat{A}}{2}} \cdot \frac{sin\widehat{CBE}}{sin\widehat{ABE}} \cdot \frac{sin\widehat{ACZ}}{sin\widehat{BCZ}} = 1$$

και το ζητούμενο έπεται από το αντίστροφο τριγ. Θ. *Ceva* **Λύση 2** (Κώστας Βήττας)

- Έστω F, το σημείο τομής του περίκυκλου (O) του δοσμένου τριγώνου $\triangle ABC$, από την διχοτόμο AD της γωνίας $\angle A$ και στο εγγεγραμμένο εξάγωνο $AZBFCE$, για να συντρέχουν οι διαγώνιές του AF, BE, CZ, αρκεί να αποδειχθεί ότι το γινόμενο τριών μη διαδοχικών πλευρών του, είναι ίσο με το γινόμενο των άλλων τριών πλευρών του.

  Δηλαδή, αρκεί να αποδειχθεί ότι ισχύει $(AZ)(BF)(CE) = (ZB)(FC)(EA) \quad ,(1)$

  Από (1) και $BF = FC$ αρκεί να αποδειχθεί ότι ισχύει $(AZ)(CE) = (ZB)(EA) \quad ,(2)$

- Από τα όμοια τρίγωνα $\triangle AZT$, $\triangle ZBT$ έχουμε

  $$\frac{AZ}{BZ} = \frac{ZT}{BT} = \frac{AT}{ZT} \Longrightarrow \frac{(AZ)^2}{(BZ)^2} = \frac{AT}{BT} \quad ,(3)$$

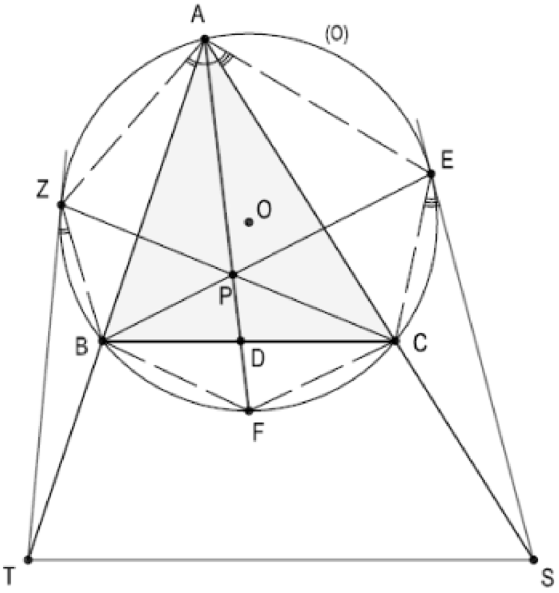
  Ομοίως, από όμοια τρίγωνα $\triangle AES$, $\triangle ECS$ έχουμε

  $$\frac{EA}{CE} = \frac{ES}{CS} = \frac{AS}{ES} \Longrightarrow \frac{(EA)^2}{(CE)^2} = \frac{AS}{CS} \quad ,(4)$$

  Από (3), (4) και $\dfrac{AT}{BT} = \dfrac{AS}{CS}$, λόγω $BC \parallel TS$, προκύπτει ότι

  $$\frac{(AZ)^2}{(BZ)^2} = \frac{(EA)^2}{(CE)^2} \Longrightarrow \frac{AZ}{ZB} = \frac{EA}{CE} \Longrightarrow (2)$$

  Άρα, αφού ισχύει η (2), ισχύει και η (1) και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.



.

Λύση 3 (Σωτήρης Λουρίδας) $TZ^2 = TB \cdot TA$,

$$SE^2 = SC \cdot SA \Rightarrow \frac{TZ}{TA} = \frac{SE}{SA}, \frac{TZ}{TB} = \frac{SE}{SB},$$

με

$$\frac{TZ}{TA} = \frac{ZB}{ZA},$$

$$\frac{SE}{SA} = \frac{EC}{AE} \Rightarrow \frac{ZB}{ZA} = \frac{EC}{AC}.$$

Επομένως έχουμε:

$$\frac{ZB}{AC} = \frac{BL}{LC},$$

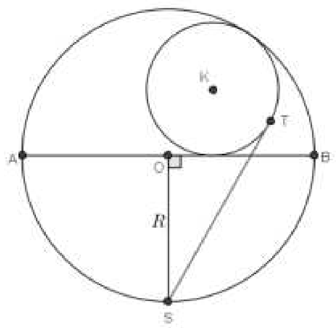
$$\frac{BC}{ZA} = \frac{CL}{LA} \Rightarrow \frac{ZB}{ZA} = \frac{AC \cdot BL}{BC \cdot AL},$$

όμοια παίρνουμε ότι:

$$\frac{EC}{EA} = \frac{AB \cdot CM}{BC \cdot AM} \Rightarrow \frac{LB}{LA} \cdot \frac{MA}{MC} \cdot \frac{CD}{DB} = 1$$

$(L \equiv AB \cap ZC, \quad M \equiv AC \cap BE)$.

ΑΣΚΗΣΗ 16 *(Προτείνει ο KARKAR) Στο βόρειο ημικύκλιο κάποιος κύκλος* (K) *εφάπτεται του* (O, R) *και της ισημερινής διαμέτρου . Υπολογίστε το εφαπτόμενο τμήμα* ST *.*



http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=22&t=30051

Λύση 1 (Γρηγόρης Κακλαμάνος) Έστω P το σημείο επαφής των $(O), (K)$ και Q το σημείο επαφής της AB και του (K).

Η ομοιοθεσία με κέντρο P στέλνει το Q στο μέσο του *τοξ.*ASB, δηλαδή τα P, Q, S είναι συνευθειακά.

Έστω C το αντιδιαμετρικό του S.

Τότε επειδή $\widehat{SOQ} = \widehat{QPC} = 90^o$ το $OQPC$ είναι εγγράψιμο.

Συνεπώς $ST = \sqrt{SQ \cdot SP} = \sqrt{SO \cdot SC} = \sqrt{2}R$.

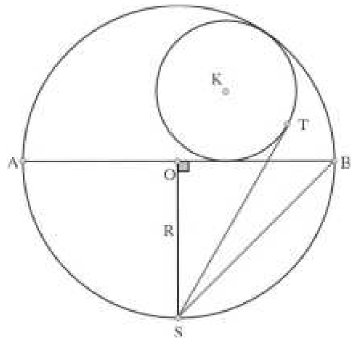
Λύση 2 (Σεραφείμ Τσιπέλης) Αντιστρέφοντας

με πόλο το σημείο S και λόγο $\lambda = SB^2$

ο κύκλος (O) αντιστρέφεται στην ευθεία AB , κι η ευθεία AB στον κύκλο (O) .

Ο κύκλος (K) σαν εφαπτόμενος των δύο γραμμών παραμένει αμετάβλητος, άρα

$ST^2 = \lambda = SB^2 \Rightarrow ST = R \cdot \sqrt{2}$.



.

Λύση 3 (Θανάσης Α.) θα δείξουμε ότι H, P, S συνευθειακά.

Αν δεν συμβαίνει αυτό, τότε έστω:

$S' \equiv HP \bigcap OS$.. Επίσης έστω $K\hat{P}H = \omega$.

Τότε

$$H\hat{P}B = 90^\circ - \omega \overset{\kappa\alpha\tau\alpha\kappa o\rho\upsilon\varphi\eta\nu}{=} O\hat{P}S' \overset{\triangle OPS'\ \hat{O}=90^\circ}{\Rightarrow}$$

$O\hat{S}'P = \omega$ (1)

Επίσης $K\hat{H}P \overset{KH=KP=\rho}{=} \omega$ (2)

$\alpha\pi o$ (1), (2) $\Rightarrow \triangle OHS'$:

$OH(=R) = OS' \overset{OS=R}{\Rightarrow} S' \equiv S$

Από την δύναμη του σημείου S στον (K, ρ) $\Rightarrow TS^2 = SP \cdot SH$ (3)

Επίσης από ομοιότητα $\triangle OSH \approx \triangle KPH \Rightarrow$ $\frac{SH}{PH} = \frac{R}{\rho} \Rightarrow SH = \frac{R}{\rho} \cdot PH$ (4)

Από (3), (4) $\Rightarrow TS^2 = SP \cdot HP \cdot \frac{R}{\rho}$ (5)

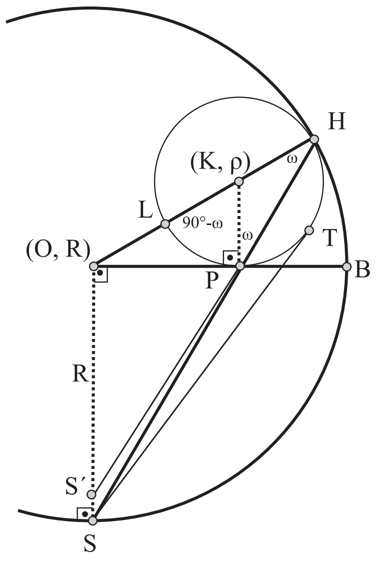
Από ομοιότητα$\triangle OPS \approx LPH$

$(S\hat{O}P = L\hat{P}H = 90^\circ \ \wedge \ L\hat{H}P = O\hat{S}P = \omega) \Rightarrow$

$\frac{OS}{HP} = \frac{SP}{LH} \Rightarrow SP \cdot HP = 2 \cdot \rho \cdot R$ (6)

Τέλος λοιπόν από (5), (6) $\Rightarrow TS^2 = 2 \cdot R \cdot \rho \cdot \frac{R}{\rho} \Rightarrow$

$TS^2 = 2 \cdot R^2 \Rightarrow \boxed{TS = \sqrt{2} \cdot R}$ $o.\varepsilon\delta.$



Επιμελητής: Λευτέρης Πρωτοπαπάς

ΑΣΚΗΣΗ 17 *(Προτείνει ο Γιώργος Κοτζαγιαννίδης) Να αποδείξετε ότι αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\alpha = 2\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma$, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=23&t=25883

Λύση 1 (Γιώργος Απόκης) Από τη δοσμένη σχέση έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{a}{2\beta}$$

και από το νόμο των συνημιτόνων:

$$\sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{\beta^2 + a^2 - \gamma^2}{2a\beta}.$$

Από τις δύο σχέσεις, προκύπτει:

$$\frac{a}{2\beta} = \frac{\beta^2 + a^2 - \gamma^2}{2a\beta} \Rightarrow$$

$$a^2 = \beta^2 + a^2 - \gamma^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta^2 = \gamma^2 \Rightarrow \beta = \gamma,$$

άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Λύση 2 (Θάνος Μάγκος) Ισχύει $a = b\cos C + c\cos B$ (κανόνας των προβολών), οπότε η δοθείσα γράφεται: $b\cos C = c\cos B$

δηλαδή

$$\frac{b}{c} = \frac{\cos B}{\cos C}$$

Διακρίνοντας περιπτώσεις $b < c, c < b$ καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $b = c$.

Λύση 3 (Θάνος Μάγκος) Η δοθείσα γράφεται ως

$$a^2 = 2ab\cos C,$$

δηλαδή διαδοχικά

$$\overrightarrow{BC}^2 = 2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{BC}^2 + 2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BC} = 0,$$

$$\overrightarrow{BC}\cdot(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}) = 0$$

$$\overrightarrow{BC}\cdot(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}) = 0$$

$$2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{MA} = 0, \text{ όπου } M \text{ το μέσον της } BC.$$

Άρα, η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά BC είναι και ύψος, οπότε έπεται το ζητούμενο.

Λύση 4 (Σωτήρης Λουρίδας) $\cos C > 0 \Rightarrow C \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow BC = 2CD$, αν το AD είναι το ύψος από την κορυφή A.

Άρα το ύψος είναι και διάμεσος.

Λύση 5 (Γιώργος Κοτζαγιαννίδης) $\alpha = 2\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow |\vec{B\Gamma}| = 2|\vec{\Gamma A}|\frac{\vec{\Gamma A}\cdot\vec{\Gamma B}}{|\vec{\Gamma A}||\vec{\Gamma B}|} \Leftrightarrow \vec{B\Gamma}^2 = 2\vec{\Gamma A}\cdot\vec{\Gamma B} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\vec{A\Gamma} - \vec{AB})^2 = -2\vec{A\Gamma}\cdot(\vec{AB} - \vec{A\Gamma}) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow |\vec{AB}| = |\vec{A\Gamma}|.$$

ΑΣΚΗΣΗ 18 *(Προτείνει ο Μιλτιάδης Μαγκαφάς) Δίνεται το σταθερό σημείο $A(a, b)$ με $a, b \neq 0$ και $a \neq -b$ και τα μεταβλητά σημεία $K(k, 0)$ και $\Lambda(0, \lambda)$ τέτοια ώστε $\vec{AK}\cdot\vec{A\Lambda} = \vec{OA}^2$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων.*
1) Να δείξετε ότι το μέσο του τμήματος $K\Lambda$ κινείται σε σταθερή ευθεία (ε), η οποία είναι κάθετη στην OA.
2)Αν η ευθεία (ε) τέμνει την ευθεία $(\varepsilon_1) : x - y = 2$ στο σημείο P, έτσι ώστε $(OP) = \sqrt{2}$, τότε να δείξετε ότι το σημείο A βρίσκεται στην ευθεία $(\eta) : y = x$.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=23&t=22924

Λύση (Ηλίας Καμπελής) Είναι $\overrightarrow{AK} = (k - \alpha, -b)$, $\overrightarrow{A\Lambda} = (-\alpha, \lambda - b)$ και $\overrightarrow{OA} = (\alpha, b)$
$\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{A\Lambda} = \overline{OA}^2 \Rightarrow -\alpha k + \alpha^2 - b\lambda + b^2 = \alpha^2 + b^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha k = -b\lambda(1)$.

1) Το μέσο του $K\Lambda$ είναι το σημείο: $M\left(\frac{k}{2}, \frac{\lambda}{2}\right)$.

Αν $x = \frac{k}{2}$ και $y = \frac{\lambda}{2}$ τότε:

$$\alpha x=\frac{\alpha k}{2}\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\alpha x=-\frac{b\lambda}{2}\Leftrightarrow \alpha x=-by\Leftrightarrow \alpha x+by=0.$$

Άρα το M κινείται στην ευθεία με εξίσωση

$(\varepsilon):\alpha x+by=0$ η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon=-\frac{\alpha}{b}$. Η ΟΑ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\text{OA}}=\frac{b}{\alpha}$. Έτσι $\lambda_\varepsilon\cdot\lambda_{\text{OA}}=-1\Leftrightarrow \varepsilon\perp\text{OA}$.

2) Το Ρ είναι η λύση του συστήματος
$$\begin{cases}\alpha x+by=0\\ x-y=2\ (2)\end{cases}\underset{\cdot b}{\Leftrightarrow}\begin{cases}\alpha x+by=0\\ bx-by=2b\end{cases}.$$

Προσθέτοντας τις δύο αυτές σχέσεις κατά μέλη παίρνουμε:

$$(\alpha+b)\,x=2b\Leftrightarrow x=\frac{2b}{\alpha+b}$$
και αντικαθιστώντας στην (2) βρίσκουμε $y=\frac{-2\alpha}{\alpha+b}$.

Έτσι $\text{P}\left(\frac{2b}{\alpha+b},\frac{-2\alpha}{\alpha+b}\right)$ και

$(\text{OP})=\sqrt{2}\Leftrightarrow$

$$\frac{4\alpha^2+4b^2}{(\alpha+b)^2}=2\Leftrightarrow 2\alpha^2+4\alpha b+2b^2=4\alpha^2+4b^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha b+b^2=2\alpha^2+2b^2\Leftrightarrow(\alpha-b)^2=0\Leftrightarrow\alpha=b.$$

Έτσι το σημείο Α γίνεται $\text{A}(\alpha,\alpha)$, οπότε ανήκει στην ευθεία $(\eta):y=x$.

ΑΣΚΗΣΗ 19 *(Προτείνει ο Μηνάς Χάτζος) Θεωρούμε το δείγμα με παρατηρήσεις* (x_i)*:* $0, 1, 2, ..., n$ *,*$n \in \mathbb{N}^*$ *το οποίο έχει διάμεσο* $d = \dfrac{2k+1}{2}$*,*$k \in \mathbb{N}$*.*

1. *Να αποδείξετε ότι ο* n *είναι περιττός*
2. *Να αποδείξετε ότι* $n = 2k + 1$
3. *Για* $k = 2$ *Να βρείτε την μέση τιμή των παρατηρήσεων.*
4. *Σχηματίζουμε τις παρατηρήσεις* $y_i = ax_i + b, ab < 0$ *τέτοιες ώστε* $\overline{x} = \overline{y}$ *και* $s_y = s_x$ *Να βρεθούν οι* a, b*.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=18&t=26302

Λύση 1 (Ηλίας Καμπελής)

1. Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι $n + 1$.

   Αν ο n είναι άρτιος, ο $n + 1$ είναι περιττός, οπότε η διάμεσος d θα είναι μία από τις παρατηρήσεις, δηλαδή $d \in N^*$.

   Όμως $d = \frac{2k+1}{2} \notin N$, γιατί $2k + 1$ περιττός.

   Άρα ο n είναι περιττός.

2. Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι $n + 1$, δηλαδή άρτιος.

   Άρα η διάμεσος είναι η μέση τιμή των παρατηρήσεων που βρίσκονται στις θέσεις $\dfrac{n+1}{2}$ και $\dfrac{n+1}{2} + 1$.

   Αφού οι παρατηρήσεις αποτελούν αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο $\alpha_1 = 0$ και διαφορά $\omega = 1$ τότε $\alpha_\nu = \nu - 1$

   Έτσι $\alpha_{\frac{n+1}{2}} = \dfrac{n+1}{2} - 1$ και $\alpha_{\frac{n+1}{2}+1} = \dfrac{n+1}{2}$ όποτε η διάμεσος είναι:

   $d = \frac{\frac{n+1}{2}-1+\frac{n+1}{2}}{2} \Rightarrow \frac{2k+1}{2} = \frac{n}{2} \Rightarrow n = 2k + 1.$

3. Αν $k = 2$, τότε $n = 2 \cdot 2 + 1 = 5$, δηλαδή οι παρατηρήσεις είναι οι $0, 1, 2, 3, 4, 5$

   Η μέση τιμή τους είναι $\overline{x} = \frac{0+1+2+3+4+5}{6} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$

4. Η μέση τιμή των παρατηρήσεων y_i είναι:

   $\overline{y} = \alpha\overline{x} + b \overset{\overline{y}=\overline{x}}{\Rightarrow} (1 - \alpha)\,\overline{x} = b(1)$

   Η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων y_i είναι:

   $s_y = |\alpha|\, s_x \overset{s_y=s_x}{\Rightarrow} |\alpha| = 1 \Rightarrow \alpha = 1 \quad \acute{\eta} \quad \alpha = -1$

   Με $\alpha = 1$ από την (1) είναι $b = 0$ το οποίο είναι άτοπο γιατί $ab < 0$

   Με $\alpha = -1$ από την (1) είναι $b = 2\overline{x} \Rightarrow b = 5$

   Άρα $\alpha = -1$ και $b = 5$.

(Μηνάς Χάτζος) Μία σκέψη για το 2. χωρίς αριθμητική πρόοδο.

Εφόσον το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιος ,η διάμεσος ισούται με το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων

Έστω m η μικρότερη τότε η επόμενη θα είναι η $m + 1$,και θα είναι $d = \frac{2k+1}{2} = \frac{m+(m+1)}{2} \Leftrightarrow k = m$

Το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της m είναι $m + 1 = k + 1$ ενώ οι συνολικές είναι $n + 1$.Έτσι οι παρατηρήσεις μικρότερες της διαμέσου θα είναι $m + 1 = k + 1$,ενώ μεγαλύτερες απο αυτήν θα είναι $(n + 1) - (k + 1) = n - k$.

Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος (σε δείγμα άρτιου αριθμού παρατηρήσεων) είναι η τιμή κατά την οποία όσες παρατηρήσεις είναι μικρότερες απο αυτήν τόσες είναι και μεγαλύτερες απο αυτήν.

Άρα $k+1=n-k \Leftrightarrow n=2k+1$.

ΑΣΚΗΣΗ 20 *(Προτείνει ο Δημήτρης Μυρογιάννης) Θεωρούμε πείραμα τύχης με δειγματικό χώρο Ω και A ένα ενδεχόμενο αυτού.*

Να αποδείξετε ότι $[P(A)]^2+[P(A')]^2 \geq \dfrac{1}{2}$.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=18&t=26233

Λύση 1 (Βασίλης Μαυροφρύδης) $[P(A)]^2+[P(A')]^2=$

$$P^2(A)+(1-P(A))^2=2P^2(A)-2P(A)+1=$$

$$\left(\sqrt{2}P(A)-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}$$

με την ισότητα να ισχύει όταν $P(A)=\dfrac{1}{2}$.

Λύση 2 (Ορέστης Γότσης) Αν $x=P(A),\ y=P(A')$,

τότε $[P(A)]^2+[P(A')]^2\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$$(x+y)^2-2xy\geq\frac{1}{2}\overset{x+y=1}{\Leftrightarrow}1-2xy\geq\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2xy\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow xy\leq\frac{1}{4}\overset{y=1-x}{\Leftrightarrow}x-x^2\leq\frac{1}{4}\Leftrightarrow$$

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\geq 0$, που ισχύει.

Λύση 3 (Φωτεινή Καλδή) Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=x^2+(1-x)^2,\quad x\in[0,1]$$

συνεχής, παραγωγίσιμη με $f'(x)=2(2x-1)$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x_o=\frac{1}{2}$

$$f(x)\geq f(\tfrac{1}{2})\Rightarrow f(x)\geq\tfrac{1}{2},\forall x\in[0,1]$$

$$f(P(A))=(P(A))^2+(P(A'))^2\geq\tfrac{1}{2}.$$

Λύση 4 (Χρήστος Κυριαζής) Και από τη βασική ανισότητα:

$2(x^2+y^2)\geq(x+y)^2$ βγαίνει άμεσα...

Λύση 5 (Χρήστος Ντάβας) Έστω $P(A)=x\quad,P(A')=y$

τότε $\begin{matrix}0\leq x,y\leq 1\\ x+y=1\end{matrix}$

Υποθέτουμε ότι

$$x=\frac{1}{2}-a\Rightarrow y=\frac{1}{2}+a,-\frac{1}{2}\leq a\leq\frac{1}{2}$$

και άμεσα έχουμε:

$$x^2+y^2=(\frac{1}{2}-a)^2+(\frac{1}{2}+a)^2=\frac{1}{2}+2a^2\geq\frac{1}{2}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 21 *(Προτείνει ο Δημήτρης Κατσίποδας) Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z και w για τους οποίους ισχύουν*

$$|(1+i)z-2-4i| = \sqrt{18} \quad \textit{και} \quad w = 2z-11+5i.$$

Να βρείτε:

1. *Τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z*
2. *Την μέγιστη και ελάχιστη τιμή του $|z|$*
3. *Τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του w*
4. *Την μέγιστη και ελάχιστη τιμή του $|z-w|$*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=8746

Λύση (Δημήτρης Κατσίποδας)

1. Έστω $z = x + yi$ με $x, y \in R$. Έχουμε

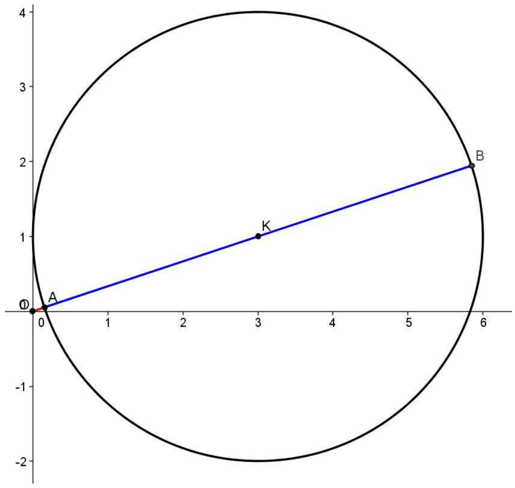
$$|(1+i)z-2-4i| = \sqrt{18} \Rightarrow |(1+i)(z-\tfrac{2+4i}{1+i})| = \sqrt{18} \Rightarrow$$

$$|1+i||z-\tfrac{2+4i}{1+i}| = \sqrt{18} \Rightarrow$$

$$\sqrt{2}|z-\tfrac{2(1+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}| = 3\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$|z-\tfrac{2(1-i+2i+2)}{2}| = 3 \Rightarrow |z-(3+i)| = 3$$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι ο κύκλος με κέντρο $K(3,1)$ και ακτίνας $\rho_1 = 3$.



2. Για να βρώ την μέγιστη και ελάχιστη τιμή του $|z|$ φέρνω την OK κι έχω

$$(OK) = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10} \text{ οπότε}$$

$$|z|_{min} = (OA) = (OK) - \rho_1 = \sqrt{10} - 3.$$

$$|z|_{max} = (OB) = (OK) + \rho_1 = \sqrt{10} + 3.$$

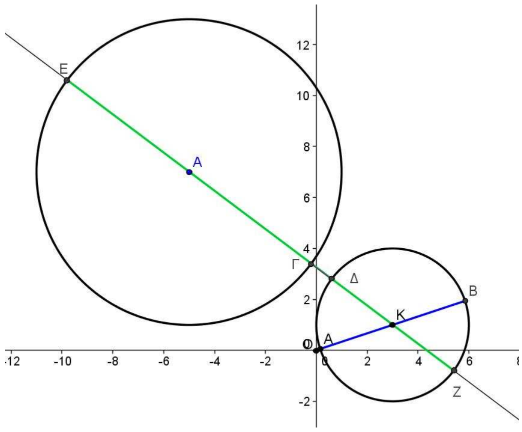
3. Έστω $w = x + yi$ με $x, y \in R$. Έχουμε

$w = 2z - 11 + 5i \Rightarrow 2z - 6 - 2i = w + 5 - 7i \Rightarrow 2(z-3-i) = w+5-7i$

Επομένως έχουμε $|2(z-3-i)| = |w+5-7i| \Rightarrow$

$$|w+5-7i| = 2 \cdot |z-3-i| \Rightarrow |w-(-5+7i)| = 6.$$

Επομένως οι εικόνες του w κινούνται σε κύκλο με κέντρο $\Lambda(-5,7)$ και ακτίνας $\rho_2 = 6$.



4.

Έχουμε $(K\Lambda) = \sqrt{(-5-3)^2+(7-1)^2} = 10$.

Με μια πρώτη ματιά δίνει το $|z-w|_{\min} =$

$(\Gamma\Delta) = (K\Lambda) - \rho_1 - \rho_2 = 10 - 3 - 6 = 1$ και

$|z-w|_{min} = (EZ) = (K\Lambda) + \rho_1 + \rho_2 = 10 + 3 + 6 = 19$

Αυτό όμως είναι λάθος διότι οι μιγαδικοί z και w βρίσκονται σε αλληλοεξάρτηση,

οπότε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$ δεν μπορούμε να την βρούμε γεωμετρικά,διοτι οι μιγαδικοί z και w δεν μπορούν να πάρουν τις κατάλληλες θέσεις ώστε

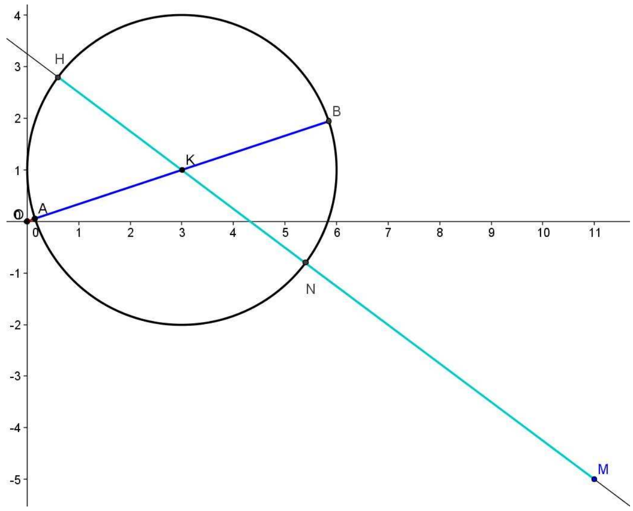
$|z-w|_{\min} = (\Gamma\Delta) = (K\Lambda)-\rho_1-\rho_2 = 10-3-6 = 1$ και

$|z-w|_{\min} = (EZ) = (K\Lambda) + \rho_1 + \rho_2 = 10 + 3 + 6 = 19$

Έτσι έχουμε

$|z-w| = |w-z| = |2z - 11 + 5i - z| = |z - 11 + 5i| = |z - (11 - 5i)|, \quad (1)$

Όμως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι ο κύκλος με κέντρο $K(3,1)$ και ακτίνας $\rho_1 = 3$ έτσι η (1) παριστάνει την απόσταση του σημείου $M(11,-5)$ απο τον κύκλο με κέντρο $K(3,1)$ και ακτίνας $\rho_1 = 3$.



$(KM) = \sqrt{(11-3)^2+(-5-1)^2} = 10$

Έτσι έχουμε

$|z-w|_{\min} = (MN) = (MK) - \rho_1 = 10 - 3 = 7$

Και $|z-w|_{\max} = (M\Xi) = (MK) + \rho_1 = 10 + 3 = 13$

ΑΣΚΗΣΗ 22 *(Προτείνει ο Νίκος Ζανταρίδης) Αν $z \in C$ και ισχύει $\left|z^2+z+1\right| = |z+1|$,να δείξετε ότι:* $\mathrm{Re}(z) \in \left[-1, \frac{1}{3}\right]$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=28297

Λύση ($STOPJOHN$) $\left|z^2+z+1\right| = |z+1| \Leftrightarrow$

$\left|z^2+z+1\right|^2 = |z+1|^2 \Leftrightarrow$

$(z\overline{z})^2 + z\overline{z}^2 + z^2\overline{z} + z^2 + \overline{z^2} = 0 \Leftrightarrow$

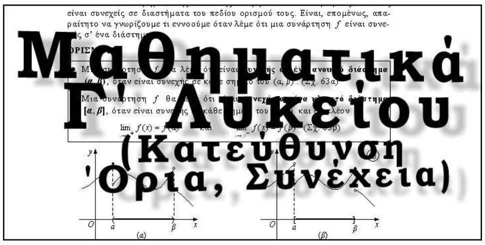
$|z|^4 + 2|z|^2(Re(z)-1) + (Re(z)-1)^2 -$

$(Re(z)-1)^2 + 4(Re(z))^2 = 0 \Leftrightarrow$

$3(Re(z)+1)(Re(z)-\frac{1}{3}) = -(|z|^2 + Re(z) - 1)^2$

εφόσον το δεύτερο μέλος είναι πραγματικός αρνητικός αριθμός ή μηδέν θα έχουμε

$3(Re(z)+1)(Re(z)-\frac{1}{3}) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq Re(z) \leq \frac{1}{3}$



Επιμελητής: Μίλτος Παπαγρηγοράκης

ΑΣΚΗΣΗ 23 *(Προτείνει ο Mulder) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ώστε για κάθε $c\in\mathbb{R}$ η εξίσωση $f(x)=c$ να έχει ακριβώς δύο ρίζες.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=52&t=15491

Λύση (Σπύρος Καπελλίδης) Έστω πως συμβαίνει το

αντίθετο και $\alpha<\beta$ με $f(\alpha)=f(\beta)$

Άρα για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ θα έχουμε ή $f(x)<f(\alpha)$ ή $f(x)>f(\alpha)$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι ισχύει το πρώτο

Αν ονομάσουμε m το ελάχιστο της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε θα αληθεύει ένα εκ των επομένων δύο

Α) Η συνάρτηση παίρνει την τιμή m μία ακριβώς φορά στο $c_1\in(\alpha,\beta)$ και μία ακριβώς φορά εκτός του (α,β), ας πούμε στο $c_2\in(-\infty,\alpha)$. ή

Β) Η συνάρτηση παίρνει την τιμή ακριβώς δύο φορές στα $c_1,c_2\in(\alpha,\beta)$ με $c_1<c_2$

Αν αληθεύει το Α) τότε παίρνουμε ένα $y\in(m,f(\alpha))$

και από το Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής θα έχουμε ότι υπάρχουν $x_1\in(c_2,\alpha)$, $x_2\in(\alpha,c_1)$, $x_3\in(c_1,\beta)$

με $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=y$, άτοπο

Αν αληθεύει το Β) τότε θα έχουμε ότι υπάρχουν $c_1,c_2\in(\alpha,\beta)$ με $c_1<c_2$ με $f(c_1)=f(c_2)=m$

Έστω $c\in(c_1,c_2)$ και $y=f(c)$,

τότε θα υπάρχουν $x_1\in(\alpha,c_1)$, $x_2\in(c_1,\beta)$ με $f(x_1)=f(x_2)=y$

(επίσης από το Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής) , επίσης άτοπο.

ΑΣΚΗΣΗ 24 *(Προτείνει ο Σπύρος Καρδαμίτσης)*

1. *Αν η συνάρτηση*

   f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$ και

   $f(x)>0$ για κάθε $x>0$, να δείξετε ότι η συνάρτηση

   g με $g(x)=\frac{1}{f(x)}+f\left(\frac{1}{x}\right)$ είναι γνησίως φθίνουσα

   στο διάστημα $(0,+\infty)$.

2. *Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $h(x)=\frac{1}{e^x}+e^{\frac{1}{x}}-\ln x$*

3. *Να λύθει η ανίσωση $e^{-2x}+e^{\frac{1}{2x}}-\frac{1}{e}>\ln 2x+e$*

---

http://mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=52&t=17360

Λύση (Ηλίας καμπελης και Στάθης Κούτρας)

1. Έστω $0<x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

   $\Rightarrow \frac{1}{f(x_1)}>\frac{1}{f(x_2)}$ (1)

   (γιατί f γν. αύξουσα και $f(x)>0$)

   $0<x_1<x_2\Rightarrow\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}\Rightarrow$

   $f\left(\frac{1}{x_1}\right)>f\left(\frac{1}{x_2}\right)$ (2)

   Προσθέτοντας τις (1) και (2) βρίσκουμε ότι

   $g(x_1)>g(x_2)$ δηλαδή η g είναι γν. φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

2. Με $x>0$ και $0<x_1<x_2\Rightarrow\ln x_1<\ln x_2\Rightarrow$

   $-\ln x_1>-\ln x_2$ (3)

   οπότε η συνάρτηση $t(x)=-\ln x$ είναι γν. φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Η συνάρτηση $f(x) = e^x$ είναι γν. αύξουσα, έτσι

σύμφωνα με το 1. ερώτημα η

$g(x) = \frac{1}{f(x)} + f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{e^x} + e^{\frac{1}{x}}$ είναι γν. φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Επειδή $h(x) = g(x) + t(x)$ και είναι άθροισμα γν. φθίνουσων συναρτήσεων θα είναι και η

$h(x) = \frac{1}{e^x} + e^{\frac{1}{x}} - \ln x$ είναι γν. φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

3. Έχουμε $e^{2x} + e^{\frac{1}{2x}} - \frac{1}{e} > \ln 2x + e$

$\Leftrightarrow e^{2x} + e^{\frac{1}{2x}} - \ln 2x > \frac{1}{e} + e \overset{x>0}{\Leftrightarrow}$

$h(2x) > h(1) \Leftrightarrow$

$2x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$

Άρα $0 < x < \frac{1}{2}$

Επιμελητής: Ροδόλφος Μπόρης

ΑΣΚΗΣΗ 25 *(Προτείνει ο Νίκος Ζανταρίδης) Να δειχθεί ότι:*$e^x + e^{-x} + 2\cos x \geq 4, \forall x \in R$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=53&t=30908

Λύση 1 (Σωτήρης Στόγιας) Διαιρώντας με 2 γράφεται ισοδύναμα

$cosh(x) + cos(x) \geq 2$

Το πρώτο μέλος έχει ανάπτυγμα σε σειρά : $2+\frac{x^4}{12}+R$ με R άθροισμα άρτιων δυνάμεων, οπότε προκύπτει το ζητούμενο.

Λύση 2 (Θάνος Μάγκος)
Θεωρούμε την (προφανώς) άρτια συνάρτηση

$$g(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x, \ \ x \in \mathbb{R}.$$

Είναι $g''(x) = e^x + e^{-x} - 2\cos x \geq 2 - 2\cos x \geq 0$,

άρα η g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Επομένως, από την ανισότητα *Jensen* έχουμε $g(x) + g(-x) \geq 2g(0)$

δηλαδή τη ζητούμενη.

Λύση 3 (Νίκος Αποστολάκης) Έστω

$f(x) = e^x + e^{-x} + 2cosx - 4, x \in R.$

Είναι δύο φορές παραγωγίμη στο R με

$f'(x) = e^x - e^{-x} - 2sinx, x \in R$ και

$f''(x) = e^x + e^{-x} - 2cosx, x \in R.$

Για κάθε $x \in R$ ισχύουν

$e^x + e^{-x} \geq 2$ και $-2cosx \geq -2$

Άρα $e^x + e^{-x} - 2cosx \geq 0$, για κάθε $x \in R$ επομένως

$f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in R.$

Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο R, οπότε για κάθε $x > 0$ ισχύει $f'(x) > f'(0) = 0$ και

$x < 0$ ισχύει $f'(x) < f'(0) = 0$

Επομένως στο διάστημα $(0, +\propto)$ η f είναι γνησίως αύξουσα και στο $(-\propto, 0)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Άρα στο $x = 0$ παρουσιάζει ελάχιστο το $f(0) = 0$,

οπότε $f(x) \geq f(0) = 0$ για κάθε $x \in R$ και αποδείξαμε το ζητούμενο.

Λύση 4 (Θάνος Μάγκος) Και κάπως αλλιώς:

Η συνάρτηση $f(x) = e^x - e^{-x} - 2\sin x, \ \ x \in \mathbb{R}$

είναι φανερά περιττή.

Περιοριζόμαστε στο $A = [0, +\infty)$.

Ισχύει $f(x) \geq 0, \ \ \forall x \in A.$

Πράγματι, η συνάρτηση $g(x) = e^x - e^{-x} - 2x$ έχει παράγωγο $g'(x) = e^x + e^{-x} - 2 \geq 0$ και η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x = 0$,

άρα ισχύει $g(x) \geq g(0) = 0$, για κάθε $x \geq 0$.

Άρα

$e^x - e^{-x} \geq 2x \geq 2\sin x \implies f(x) \geq 0$ για κάθε $x \geq 0$.

Ισχύει δηλαδή

$e^x - e^{-x} - 2\sin x \geq 0$, για κάθε $x \geq 0$, επομένως, λόγω περιττότητας, ισχύει και

$e^x - e^{-x} - 2\sin x \leq 0$, για κάθε $x \leq 0$.

Με ολοκλήρωση των $(I), (II)$ στα διαστήματα $[0, x]$, $[x, 0]$, αντίστοιχα, προκύπτει η ζητούμενη.

Λύση 5 (Μιχάλης Λάμπρου) Μετά τις ωραίες λύσεις, ας βάλω άλλη μία λύση:

Αφού η παράσταση παραμένει αμετάβλητη αν αλλάξουμε το x σε $-x$, αρκεί να αποδείξουμε το ζητούμενο για $x \geq 0$.

Από την $p + 1/p \geq 2$, $\forall p > 0$ έχουμε

$e^y + e^{-y} - 2\cos y \geq 0$.

Ολοκληρώνουμε από 0 έως t, όπου $t \geq 0$.

Θα βρούμε $e^t - e^{-t} - 2\sin t \geq 0$.

Ολοκληρώνουμε την τελευταία από 0 έως x, όπου $x \geq 0$.

Προκύπτει η ζητούμενη.

ΑΣΚΗΣΗ 26 *(Προτείνει ο Νίκος Ζανταρίδης) Για την παραγωγίσιμη και αύξουσα συνάρτηση* $f : R \to R$

ισχύει $f'(x) = f(x+1) - 1, \forall x \in R$ *.Να βρεθεί ο τύπος της* f.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=53&t=31186

Λύση (Θάνος Μάγκος) Η f είναι αύξουσα, άρα $f'(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα $f(x+1) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

άρα $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω ότι υπάρχει a, για το οποίο είναι $f(a) > 1$.

Από τη συνθήκη έχουμε $f'(a) > f(a+1) - f(a)$.

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει $b \in (a, a+1)$, ώστε $f'(b) = f(a+1) - f(a)$,

οπότε η παραπάνω ανισότητα γίνεται

$f'(a) > f'(b)$, άτοπο, αφού η f' είναι αύξουσα. Αυτό φαίνεται με παραγώγιση των μελών της αρχικής:

$f''(x) = f'(x+1) \geq 0$.

Επιμελητής: Αναστάσιος Κοτρώνης

ΑΣΚΗΣΗ 27 *(Προτάθηκε από το Νίκο Ζανταρίδη) Η συνάρτηση $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο. Να δειχθεί ότι*

$$\int_0^2 \left|\left(x^3+x\right)f'(x)+\left(2x^2+2\right)f(x)\right|dx \geqslant 8f(2) \ .$$

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=54&t=26274

Λύση (Κυριαζής Χρήστος) Ισχύουν:

$$x^2+1\ge 2|x|, \qquad \forall x\in\mathbb{R} \tag{1}$$

$$|x|\ge x, \qquad \forall x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Η ολοκληρωτέα ποσότητα με παραγοντοποίηση γράφεται:

$$\begin{aligned}\left|(x^2+1)xf'(x)+2f(x)\right| &= (x^2+1)\left|xf'(x)+2f(x)\right|\\ &\overset{(1)}{\ge} 2|x|\left|xf'(x)+2f(x)\right|\\ &= \left|2x^2f'(x)+4xf(x)\right|\\ &= \left|\left(2x^2f(x)\right)'\right|\\ &\overset{(2)}{\ge} \left(2x^2f(x)\right)'.\end{aligned}$$

Με ολοκλήρωση τώρα των δύο μελών στο $[0,2]$,έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_0^2 \left|(x^3+x)f'(x)+(2x^2+2)f(x)\right|dx &\ge \int_0^2 \left(2x^2f(x)\right)'dx\\ &= \left[2x^2f(x)\right]_0^2\\ &= 8f(2).\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 28 *(Προτάθηκε από τον Μπάμπη Στεργίου) Αν $0<a\neq 1$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής και περιττή στο $\mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι :*

$$\int_{-1}^{1} f(x)\ln(1+a^{f(x)})dx=\ln a\cdot\int_0^1 f^2(x)dx.$$

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=54&t=31050

Λύση (Παπαπέτρος Ευάγγελος) Ας είναι $I=\int_{-1}^{1} f(x)\ln(1+a^{f(x)})dx$.

Θέτουμε $x=-t$ απ΄ όπου παίρνουμε $dx=-dt$ και νέα άκρα ολοκλήρωσης τα $t_1=1, t_2=-1$.

$$\begin{aligned}I &= \int_1^{-1} f(-t)\ln(1+a^{f(-t)})(-dt)\\ &= -\int_1^{-1} f(-t)\ln(1+a^{f(-t)})dt\\ &= -\int_{-1}^{1} f(t)\ln\left(1+\frac{1}{a^{f(t)}}\right)dt\\ &= -\int_{-1}^{1} f(t)\ln(1+a^{f(t)})dt+\ln a\int_{-1}^{1} f^2(t)dt. \qquad (3)\end{aligned}$$

Έστω η συνάρτηση $g:(-1,1)\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=f^2(x)$.

Είναι

$$g(-x)=f^2(-x)=(-f(x))^2=f^2(x)=g(x)$$

και, αφού η g είναι συνεχής, θα έχουμε

$$\int_{-1}^{1} f^2(t)dt=2\int_0^1 f^2(t)dt. \tag{4}$$

Από τις (3) και (4) παίρνουμε

$$2I=2\ln a\int_0^1 f^2(t)dt \Rightarrow I=\ln a\int_0^1 f^2(t)dt.$$

Μαθηματικά Γ' Λυκείου (Κατεύθυνση, Ασκήσεις σε όλη την Ύλη)

Επιμελητής: Σπύρος Καρδαμίτσης

ΑΣΚΗΣΗ 29 *(Προτείνει ο ghan) Έστω* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *ώστε για κάθε* $x\in\mathbb{R}$ *να ισχύει:* $f(x)=\dfrac{2e^x}{1+f^2(x)}$.

α) Να βρεθεί η $f(0)$

β) Να δειχθεί ότι η f *είναι γνησίως αύξουσα*

γ) Να λυθεί η ανίσωση $\ln f(x)>0$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=55&t=22746

Λύση (Ηλίας Καμπελής) α) Με $x=0$ η

$f(x)=\dfrac{2e^x}{1+f^2(x)}$ (1) γίνεται:

$f(0)=\frac{2}{1+f^2(0)}\Leftrightarrow$

$f^3(0)+f(0)-2=0\Leftrightarrow$

$(f(0)-1)\left(f^2(0)+f(0)+2\right)=0\Leftrightarrow$

$f(0)=1$ ή $f^2(0)+f(0)+2=0$ που είναι αδύνατη γιατί $\Delta=-7<0$

Έτσι $f(0)=1$

β) Η (1) ισοδύναμα γίνεται:

$f^3(x)+f(x)=2e^x$ (2)

Έστω $x_1,x_2\in R$ με

$x_1<x_2\overset{e^x\nearrow}{\Leftrightarrow}2e^{x_1}<2e^{x_2}\overset{(2)}{\Leftrightarrow}$

$f^3(x_1)+f(x_1)<f^3(x_2)+f(x_2)\Leftrightarrow$

$(f(x_1)-f(x_2))\left(f^2(x_1)+f(x_1)f(x_2)+f^2(x_2)\right)+$

$f(x_1)-f(x_2)<0\Leftrightarrow$

$(f(x_1)-f(x_2))\left(f^2(x_1)+f(x_1)f(x_2)+f^2(x_2)+1\right)$

<0 (*)

Άρα $f(x_1)-f(x_2)<0\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$ δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

γ) $\ln f(x)>0\Leftrightarrow\ln f(x)>\ln 1\Leftrightarrow$

$\ln f(x)>\ln f(0)\overset{\ln x\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)>f(0)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}x>0$

(*) Το τριώνυμο $x^2+\beta x+\beta^2+1$ είναι θετικό για κάθε

$x\in R$ επειδή έχει $\Delta=\beta^2-4\left(\beta^2+1\right)=$

$\beta^2-4\beta^2-4=-3\beta^2-4<0$

Έτσι με $x=f(x_1)$ και $\beta=f(x_2)$ η παράσταση $f^2(x_1)+f(x_1)f(x_2)+f^2(x_2)+1$ είναι θετική

ΑΣΚΗΣΗ 30 *(Προτείνει ο Θάνος Μάγκος) Δίνεται η συνάρτηση*

$$f(x)=\begin{cases}(x^2)^x, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$$

Μελετήστε την, ως προς τη συνέχεια

και την παραγωγισιμότητα.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=55&t=30568

Λύση (Καλαθάκης Γιώργης)

Είναι

$\lim\limits_{x\to0}x\ln(x^2)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x^2)}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{x^2}2x}{-\frac{1}{x^2}}=$
$\lim\limits_{x\to0}(-2x)=0$

Οπότε

$\lim\limits_{x\to0}e^{x\ln(x^2)}=e^0=1$

Άρα η f συνεχής στο 0

Ακόμα

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2\right)^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln(x^2)}-1}{x} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln(x^2)}(\ln(x^2)+x\frac{1}{x^2}2x)}{1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{x\ln(x^2)}(\ln(x^2)+2) = -\infty$$

Άρα δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0

ΑΣΚΗΣΗ 31 *(προτάθηκε από τον Νίκο Ζανταρίδη) Να βρεθεί το οριο*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\int_1^x e^{t^3\sin(\frac{1}{t})-x^2}dt\right).$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=56&t=27029

Λύση (Ροδόλφος Μπόρης) Ισχύουν:

1) $\sin y > \dfrac{2y}{\pi}$, $0 < y < \pi/2$ (ανίσωση Jordan)

2) $2/\pi < 1 \le t \le x \quad \Rightarrow \quad 0 < 1/t < \pi/2$.

Άρα

$$t^3\sin(1/t) > 2t^2/\pi \quad \Rightarrow$$

$$e^{t^3\sin(1/t)} > e^{2t^2/\pi} > 2t^2/\pi + 1.$$

Τότε

$$\int_1^x e^{t^3\sin(1/t)}dt > \int_1^x (2t^2/\pi) + 1dt \to +\infty \quad \Rightarrow$$

$$\int_1^x e^{t^3\sin(1/t)}dt \to +\infty, \quad \text{όταν} \quad x \to +\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\int_1^x e^{t^3\sin(\frac{1}{t})-x^2}dt\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x e^{t^3\sin(1/t)}dt}{e^{x^2}/x}.$$

Διαπιστώνουμε ευκολα ότι $e^{x^2}/x \to +\infty$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x^2-1)}{x^2} = 2$, αρκεί να βρούμε το

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^3\sin(1/x)}}{\frac{e^{x^2}(2x^2-1)}{x^2}}.$$

Ή αρκεί να βρούμε το

$$\lim_{x\to+\infty}e^{x^3\sin(1/x)-x^2} = e^{\lim_{x\to0+}\frac{\sin w-w}{w^3}}.$$

Το $\lim_{x\to0+}\frac{\sin w-w}{w^3}$ με δύο DLH προκύπτει $-1/6$.

Τελικά το ζητούμενο όριο προκύπτει $\dfrac{e^{-1/6}}{2}$.

ΑΣΚΗΣΗ 32 *(προτάθηκε από τον Πέτρο Βαλλέτα) Έστω $f,g:[0,1]\longrightarrow(0,\infty)$ συνεχείς συναρτήσεις με*

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 g(x)\,dx = 1.$$

Τότε, υπάρχει υποδιάστημα $[a,b]\subset[0,1]$ ώστε:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=56&t=3264

Λύση (Βασίλης Μαυροφρύδης) Ορίζουμε την συνάρτηση

$$F(\varepsilon) = \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} f(t)\,dt, \ \varepsilon\in\left[0,\tfrac{1}{2}\right],$$

η οποία είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ και επίσης ισχύει

$$F(0) = 1 > \frac{1}{2} > 0 = F(\tfrac{1}{2}).$$

Αρα από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\varepsilon_0\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ τέτοιο ώστε

$$F(\varepsilon_0) = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\varepsilon_0}^{1-\varepsilon_0} f(t)\,dt = \frac{1}{2}.$$

Δηλαδή υπάρχει διάστημα $[\varepsilon_0, 1-\varepsilon_0]\subset[0,1]$ με $\varepsilon_0\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f(t)\,dt = \frac{1}{2}, \quad \text{με} \quad a=\varepsilon_0,\ b=1-\varepsilon_0.$$

Ομοίως αποδεικνύεται και για την συνάρτηση g.

Επιμελητής: Σπύρος Καπελλίδης

ΑΣΚΗΣΗ 33 *(Προτείνει ο Βασίλης Μαυροφρύδης) Να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης* $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *που για κάθε* $x \in [0, +\infty)$ *ικανοποιεί την* $f(x) = x - \int\limits_0^1 \left(\sqrt{x} + \sqrt{f(t)} \right)^2 dt.$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=69&t=27833

Λύση 1 (Θανάσης Κοντογεώργης) Είναι

$$f(x) = x - \int\limits_0^1 \left(\sqrt{x} + \sqrt{f(t)} \right)^2 dt =$$

$$- \int_0^1 f(x)dx - 2\sqrt{x} \int_0^1 \sqrt{f(x)}dx.$$

Επίσης, $\int_0^1 \sqrt{f(x)}dx \geq 0.$

Αν $\int_0^1 \sqrt{f(x)}dx > 0$ τότε η f παίρνει αρνητικές τιμές για μεγάλες τιμές του x. Άτοπο.

Άρα, $\int_0^1 \sqrt{f(x)}dx = 0$ και f σταθερή. Δηλαδή $c = -c \implies c = 0 \implies f \equiv 0.$

Λύση 2 (Βασίλης Μαυροφρύδης)Έστω

$$a = \int\limits_0^1 f(x)dx \wedge b = \int\limits_0^1 \sqrt{f(x)}dx$$

Έχουμε

$$f(x) = -\int\limits_0^1 f(x)dx - 2\sqrt{x} \int\limits_0^1 \sqrt{f(x)}dx = -2b\sqrt{x} - a$$

Είναι

$$a = \int\limits_0^1 f(x)dx \geq 0 \text{ και } b = \int\limits_0^1 \sqrt{f(x)}dx \geq 0$$

και επίσης

$$a = \int\limits_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow a = \int\limits_0^1 \left(-2b\sqrt{x} - a \right) dx \Leftrightarrow$$

$$a = -2b \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_0^1 - a \Leftrightarrow 2a = -\frac{4b}{3} \Leftrightarrow a = -\frac{2b}{3} \leq 0$$

Έτσι λοιπόν $a = b = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 34 *(Προτείνει ο parmenides51) Να βρείτε την συνεχή συνάρτηση* f *για την οποία ισχύει ότι*

$$f(x) - \int_0^1 (x + y) f(y) dy = x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=69&t=30094

Λύση ($Stavroulitsa$) αρχικά έχουμε

$$f(x) - \int_0^1 (x + y)\, f(y)dy = x \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \left(\int_0^1 f(y)dy + 1 \right) x + \int_0^1 y f(y)dy$$

και επειδή τα ολοκληρώματα είναι σταθερές θέτουμε

$$a = \int_0^1 f(y)dy \text{ και } b = \int_0^1 y f(y)dy$$

οπότε έχουμε $f(x) = (a + 1)\, x + b$ άρα

$a = \int_0^1 f(y)dy$ και με αλλαγή μεταβλητής

$$a = \int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow a = \int_0^1 ((a + 1)\, x + b)dx \Leftrightarrow$$

$$a = \left[\tfrac{(a+1)x^2}{2} + bx \right]_0^1 \Leftrightarrow a = \tfrac{a+1}{2} + b \Leftrightarrow a = 2b + 1 \ (1)$$

ενώ $b = \int_0^1 y f(y)dy$ και με αλλαγή μεταβλητής

$$b = \int_0^1 x f(x)dx \Leftrightarrow b = \int_0^1 \left((a + 1)\, x^2 + bx \right) dx \Leftrightarrow$$

$$b = \left[\frac{(a + 1)\, x^3}{3} + \frac{bx^2}{2} \right]_0^1 \Leftrightarrow b = \frac{a + 1}{3} + \frac{b}{2} \Leftrightarrow$$

$6b = 2a + 2 + 3b$ (2)

από (1) και (2) παίρνουμε

$$\begin{cases} 3b - 2a - 2 = 0 \\ a - 2b - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3b - 2a - 2 = 0 \\ -4b + 2a - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$b = -4$ *και* $a = -7$ άρα $f(x) = -6x - 4$

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί (Juniors)

Άλγεβρα, Θεωρία Αριθμών, Συνδυαστική

Επιμελητής: Φωτεινή Καλδή

ΑΣΚΗΣΗ 35 *(Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης) Να εξετάσετε αν υπάρχει ακέραιος n τέτοιος ώστε η εξίσωση*

$x^4 - 2011x^2 + n = 0$ *να έχει 4 ακέραιες ρίζες.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=109&t=15584&start=760#p106547

Λύση (Δημήτρης Ιωάννου)

Ας υποθέσουμε ότι m είναι μια ακέραια ρίζα της δοσμένης εξίσωσης

Τότε αφού m είναι ρίζα, θα πρέπει

$m^4 - 2011m^2 + n = 0 \Leftrightarrow n = -m^4 + 2011m^2$

Τότε η εξίσωση γράφεται:

$x^4 - 2011x^2 - m^4 + 2011m^2 = 0 \Leftrightarrow$

$(x^2 - m^2)(x^2 + m^2) - 2011(x^2 - m^2) = 0 \Leftrightarrow$

$(x^2 - m^2)(x^2 + m^2 - 2011) = 0$

$x^2 + m^2 - 2011 = 0$ ή $x^2 = m^2$

Άρα $x = \pm m$ ή $x^2 + m^2 = 2011$

Θα αποδείξουμε τώρα, ότι η εξίσωση $x^2 + m^2 = 2011$ δεν έχει λύση στο σύνολο των ακεραίων

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ:

$m = 2k, k \epsilon Z$.

Τότε $x^2 + 4k^2 = 2011 \Rightarrow x^2$ είναι περιττός άρα και ο x είναι περιττός και άρα $x = 2t + 1$ όπου tακέραιος. Άρα

$4t^2 + 4t + 4k^2 = 2010$ που όμως είναι άτοπο αφού ο 4 δεν διαιρεί τον 2010

2η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ:

$m = 2k + 1$.

Τότε $x^2 + (2k + 1)^2 = 2011 \Rightarrow x^2 = 2011 - (2k + 1)^2$ και επειδή η διαφορά περιττών είναι άρτιος άρα ο x^2 είναι άρτιος και άρα και ο x είναι άρτιος.

Άρα $x = 2t$. Τότε θα έχουμε:

$(2t)^2 = 2011 - (2k + 1)^2 \Rightarrow 4t^2 + 4k^2 + 4k + 1 = 2011 \Rightarrow 4(t^2 + k^2 + k) = 2010$

που όμως είναι άτοπο, αφού ο 2010 δεν είναι πολλαπλάσιο του 4.

Άρα η δοσμένη εξίσωση δεν μπορεί να έχει 4 ακέραιες ρίζες

ΑΣΚΗΣΗ 36 *(Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης) Να βρείτε τις ακέραιες ρίζες της εξίσωσης*

$x^{2010} - 2006 = 4y^{2009} + 4y^{2008} + 2007y$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=109&t=15584&start=960#p127711

Λύση 1 (Δημήτρης Ιωάννου)

Η δοσμένη εξίσωση γράφεται:

$x^{2010} = 4y^{2009} + 4y^{2008} + 2007y + 2006$

- Αρχικά, θα αποδείξουμε ότι για κάθε ακέραιο x ισχύει ότι:

  $x^{2010} \equiv 0(mod9)$, ή $x^{2010} \equiv 1(mod9)$

  Πράγματι, αν $x = 3k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

  $x^{2010} = 3^{2010}k^{2010} = \pi o\lambda 9$

  Άρα $x^{2010} \equiv 0(mod9)$

  Αν $x = 3k + 1 \Rightarrow$

  $x^{2010} = (1 + 3k)^{2010} = [(1 + 3k)^3]^{670} =$

  $(1 + 9k + 27k^2 + 27k^3)^{670} =$

  $= (1 + 9n)^{670} = 1 + 9n_1$.

  Άρα $x^{2010} \equiv 1(mod9)$

  Τέλος,

  αν $x = 3k + 2 \Rightarrow$

  $x^{2010} = (2 + 3k)^{2010} = [(2 + 3k)^3]^{670} =$

  $(8 + 36k + 54k^2 + 27k^3)^{670} =$

  $= (-1 + 9 + 9n)^{670} = (-1 + 9n_1)^{670} =$

  $(-1)^{670} + 9n_2 = 1 + 9n_2$.

  Άρα $x^{2010} \equiv 1(mod9)$

- Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι ο αριθμός $A = 4y^{2009} + 4y^{2008} + 2007y + 2006$, δεν μπορεί να γραφτεί με την μορφή

  $A \equiv 0(mod9)$, ούτε και με την μορφή $A \equiv 1(mod9)$

  Πράγματι, έχουμε

  $A = 4y^2y^{2007} + 4yy^{2007} + 2007y + 2006 =$

  $= 4yy^{2007}(y + 1) + 2007y + 2007 - 1 =$

  $4yy^{2007}(y+1) + 2007(y+1) - 1 = 4yy^{2007}(y+1) + 9n - 1$

  Έστω $y = 3k + m, m\epsilon\ 0, 1, 2$. Τότε:

$A = 4(3k+m)(3k+m)^{2007}(3k+m+1)+9n-1$. Οπότε:

Αν $m = 0$, τότε:

$A = 4(3k)(3k)^{2007}(3k+1)+9n-1 = 9n_1 - 1 = 9n_1 - 9 + 8 = 9n_2 + 8$

Άρα $A \equiv 8(mod 9)$

Αν $m = 1$, τότε :

$A = 4(3k+1)(3k+1)^{2007}(3k+2)+9n-1 =$

$4(3k+1)[(1+3k)^3]^{669}(3k+2)+9n-1 =$

$= 4(3k+1)(1+9k_1)^{669}(3k+2)+9n-1 =$

$4(3k+1)(1+9k_2)(3k+2)+9n-1 =$

$= 4(3k+9k_3+1)(3k+2)+9n-1 = 4(9k_4+2)+9n-1 = 9k_5+7$

Άρα $A \equiv 7(mod 9)$

Αν $m = 2$, τότε

$A = 4(3k+2)[(3k+2)^3]^{669}(3k+3)+9n-1 =$

$4(3k+2)(8+9k_1)^{669}(3k+3)+9n-1 =$

$= 4(3k+2)(-1+9k_2)^{669}(3k+3)+9n-1 =$

$4(3k+2)(-1+9k_3)(3k+3)+9n-1 = ... = 9a-6k+2$

Όμως, αφού $-6k+2$ δεν είναι πολ/σιο του 9 και ούτε πολ9 +1, (προφανές) ,

άρα ο αριθμός A και πάλι δεν μπορεί να πάρει την μορφή $0(mod 9)$ ούτε και την μορφή $1(mod 9)$.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι η δοσμένη εξίσωση είναι αδύνατη.

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί (Juniors)

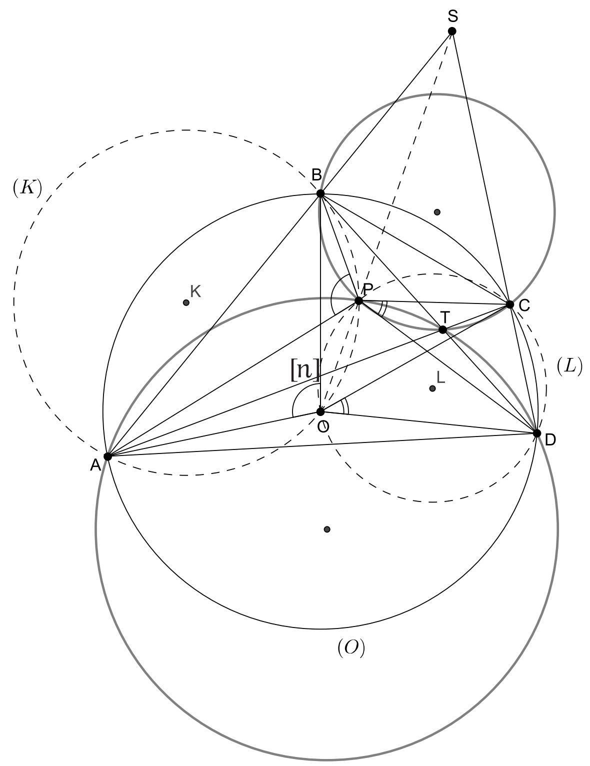
Γεωμετρία

Επιμελητής: Κώστας Βήττας

ΑΣΚΗΣΗ 37 *(Προτάθηκε από τον KARKAR) Δίνεται τετράπλευρο $ABCD$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O) και έστω τα σημεία $S \equiv AB \cap CD$ και $T \equiv AC \cap BD$. Οι κύκλοι που διέρχονται από τα A, T, D και B, T, C, επανατέμνονται στο σημείο έστω P. Αποδείξτε ότι τα σημεία A, O, P, B είναι ομοκυκλικά και ότι τα σημεία O, P, S είναι συνευθειακά.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=110&t=26246



Λύση (Γρηγόρης Κακλαμάνος)

- Από εγγράψιμα τετράπλευρα $APTD$, $BPTC$ έχουμε

$$\angle BPA =$$
$$360^o - \angle BPC - \angle CPT - \angle TPD - \angle APD =$$
$$360^o - \angle BTC - \angle CBT - \angle TAD - \angle ATD \qquad (1)$$

Από (1) και

$$\angle BTC + \angle CBT = 180^o - \angle BCA$$

και

$$\angle TAD + \angle ATD = 180^o - \angle BDA$$

προκύπτει ότι

$$\angle BPA = \angle BCA + \angle BDA = 2\angle BCA. \qquad (2)$$

Από (2) και $\angle BOA = 2\angle BCA$ έπεται ότι

$$\angle BPA = \angle BOA. \qquad (3)$$

Από (3) συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο $BPOA$ είναι εγγράψιμο και το πρώτο ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

- Από

$$\begin{aligned}\angle CPD &= \angle CPT + \angle TPD\\ &= \angle CBD + \angle CAD\\ &= \angle COD\end{aligned}$$

προκύπτει ότι το τετράπλευρο $CPOD$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο έστω (L).

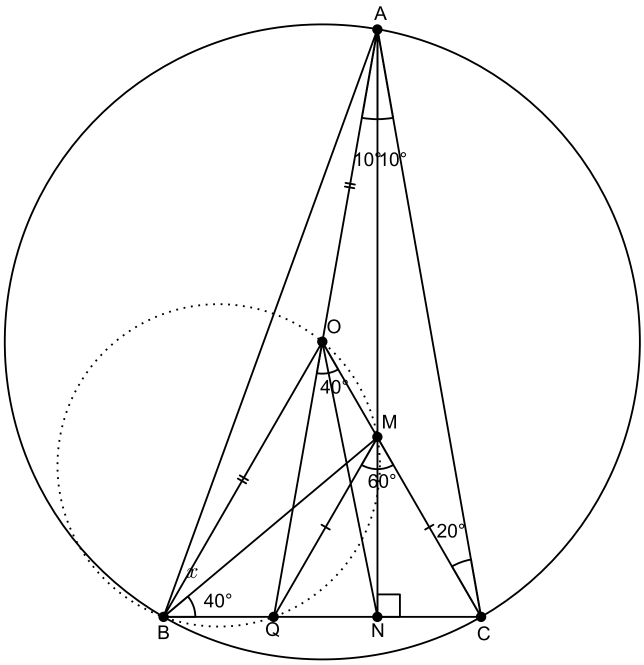
Άρα, η ευθεία OP, ως ο ριζικός άξονας των κύκλων (K), (L), περνάει από το σημείο S, ως το ριζικό κέντρο των κύκλων (O), (K), (L) και το δεύτερο ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

ΑΣΚΗΣΗ 38 *(Προτάθηκε από τον erxmer) Στο τρίγωνο $\triangle\ ABC$, δίνονται οι γωνίες $\angle BAC = 30^o$ και $\angle ABC = 70^o$. Το σημείο M είναι εσωτερικό του τριγώνου ώστε να είναι $\angle MAB = \angle MCA = 20^o$. Να ευρεθεί η γωνία $\angle MBA$.*

---

www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=110&t=27314

Λύση 1 (Στάθης Κούτρας)



Από $\angle MAB = \angle MAC = 20^o$ και $\angle ACB = 80^o$ παίρνουμε

$$\angle MCB = 60^o \tag{1}$$

Αν $\triangle$ BCO είναι το ισόπλευρο τρίγωνο προς το εσωτερικό μέρος του $\triangle$ ABC, τότε από την (1) έχουμε ότι τα σημεία O, M, C είναι συνευθειακά και από $OB = OC$, προκύπτει ότι το σημείο O ανήκει στην μεσοκάθετη ευθεία του BC.

Επειδή τώρα,

$$\angle BOC = 60^o = 2\angle BAC,$$

συμπεραίνουμε ότι το σημείο O ταυτίζεται με το περίκεντρο του $\triangle$ ABC και άρα ισχύει

$$\angle OAC = \angle OCA = 20^o \tag{2}$$

Αλλά,

$$\begin{aligned}\angle MAC + \angle ACB &= \angle BAC - \angle BAM + \angle ACB\\ &= 30^o - 20^o + 80^o\\ &= 90^o \Longrightarrow\end{aligned}$$

$$\angle ANB = 90^o \text{ όπου } N \equiv BC \cap AM.$$

Έστω το σημείο $Q \equiv BC \cap AO$ και από $\angle BAM = 20^o$ $\Longrightarrow$ $\angle QAN = \angle NAC = 10^o$, λόγω της (2) και $\angle BAC = 30^o$.

Επομένως, στο τρίγωνο $\triangle$ AQC η AN είναι ύψος και διχοτόμος και άρα το τρίγωνο αυτό είναι ισοσκελές.

Το τρίγωνο $\triangle$ MQC τώρα, με $M \in AN$ και $\angle MCQ = 60^o$ είναι ισόπλευρο και άρα, από $\angle QMC = 60^o = \angle BOC$ παίρνουμε

$$OB \parallel MQ. \tag{3}$$

Από (3) και $\angle BOC = 60^o = \angle OBC$, προκύπτει ότι το $BQMO$ είναι ισοσκελές τραπέζιο και άρα εγγράψιμο σε κύκλο έστω (K).

Επομένως, ισχύει

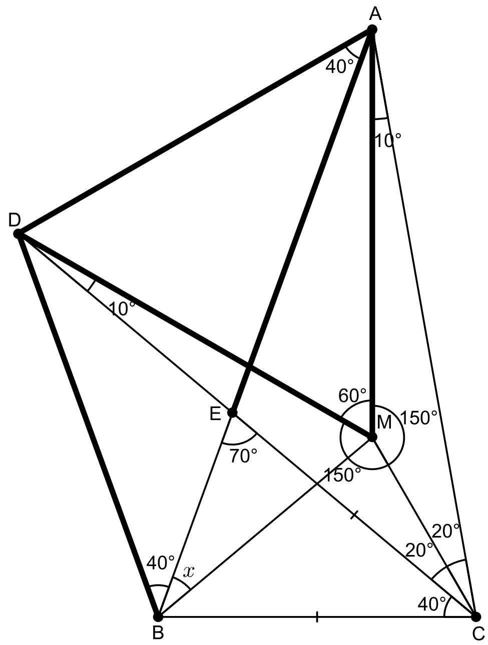
$$\begin{aligned}\angle QBM &= \angle QOM\\ &= \angle OAC + \angle OCA\\ &= 40^o.\end{aligned}$$

Άρα,

$$\angle MBA = \angle ABC - \angle QBM = 70^o - 40^o = 30^o$$

και το ζητούμενο έχει βρεθεί.

Λύση 2 (Μιχάλης Νάννος)



Από $\angle ABC = 70^o$ και $\angle BAC = 30^o \Longrightarrow \angle ACB = 80^o$ και έστω $\triangle$ AMD, το ισόπλευρο τρίγωνο προς το μέρος της AB που δεν κείται το C.

Τα τρίγωνα $\triangle$ CMA, $\triangle$ CMD είναι ίσα γιατί έχουν την CM ως κοινή πλευρά τους και $MA = MD$ και $\angle CMA = \angle CMD = 150^o$ και άρα έχουμε $CA = CD$ και $\angle MDC = \angle MAC = 10^o$ και $\angle MCD = \angle MCA = 20^o$.

Έστω το σημείο $E \equiv AB \cap CD$ και από $\angle AED = 180^o - \angle ADE - \angle EAD = 70^o$ και $\angle EBC = 70^o = \angle EDA$, προκύπτει ότι τα τρίγωνα $\triangle$ ADE, $\triangle$ CBE είναι ισοσκελή και άρα ισχύει $AD = AE$ και $CE = CB$.

Τα τρίγωνα $\triangle$ ACE, $\triangle$ DCB είναι ίσα γιατί έχουν $CA = CD$ και $CE = CB$ και $\angle ACE = 40^o = \angle DCB$ και άρα έχουμε $DB = AE = AD = DM$.

Συμπεραίνεται έτσι ότι το τρίγωνο $\triangle$ DBM είναι ισοσκελές με $\angle DBM = \angle DMB = 70^o$.

Άρα,

$$\angle MBA = \angle DBM - \angle DBA = 70^o - 40^o = 30^o,$$

γιατί $\angle DBA = \angle DAB = 40^o$ και το ζητούμενο έχει βρεθεί.

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί (Seniors)

Άλγεβρα, Θεωρία Αριθμών, Συνδυαστική

Επιμελητής: Αχιλλέας Συνεφακόπουλος

ΑΣΚΗΣΗ 39 *(Προτείνει ο Ευάγγελος Μουρούκος) Έστω a, b, c μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί, για τους οποίους ισχύει $a + b + c = 3$. Να αποδείξετε ότι:*

$ab^2 + bc^2 + ca^2 + abc \leq 4$.

Πότε ισχύει η ισότητα;

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=111&t=30064

Λύση (Αλέξανδρος Συγκελάκης) Θα αποδείξουμε την αντίστοιχη ομογενή ανισότητα

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 + abc \leq \frac{4(a+b+c)^3}{27}$$

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι ο a είναι μεταξύ των b, c. Τότε είναι $bc^2 + ca^2 \leq abc + c^2a$ αφού η τελευταία είναι ισοδύναμη με την $c(a-b)(a-c) \leq 0$ που ισχύει λόγω της υπόθεσης. Συνεπώς

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 + abc \leq ab^2 + 2abc + c^2a = a(b+c)^2.$$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι

$$a(b+c)^2 \leq \frac{4(a+b+c)^3}{27},$$

ή ισοδύναμα ότι

$$(2a)(b+c)(b+c) \leq \frac{8(a+b+c)^3}{27},$$

που ισχύει λόγω της ανισότητας αριθμητικού - γεωμετρικού μέσου:

$$\frac{2a + (b+c) + (b+c)}{3} \geq \sqrt[3]{2a(b+c)^2}.$$

Η ισότητα ισχύει για $(a, b, c) \sim (1, 1, 1)$, και $(a, b, c) \sim (2, 1, 0)$.

Σχόλια (Αχιλλέας Συνεφακόπουλος): Διαφορετικές αποδείξεις της παραπάνω ανισότητας υπάρχουν στο βιβλίο Algebraic Inequalities του Vasile Cirtoaje, Εκδόσεις GIL, σελ. 25, καθώς και στο βιβλίο Inequalities with beautiful solutions, σελ. 87, Εκδ. GIL, των V.Cirtoaje, et. al. Στο βιβλίο Secrets in Inequalities - Vol. 2, του Pham Kim Hung, Εκδ. GIL, σελ. 102-103, επισημαίνεται ότι η (ομογενής μορφή της) άσκηση(ς) αυτή(ς) είναι άμεσο συμπέρασμα του παρακάτω γενικότερου θεωρήματος:

Θεώρημα: Έστω $P(a, b, c)$ ένα κυκλικό και ομογενές πολυώνυμο βαθμού 3. Αν

$$P(1, 1, 1) \geq 0 \quad \text{και} \quad P(a, b, 0) \geq 0$$

για κάθε $a, b \geq 0$, τότε $P(a, b, c) \geq 0$ για κάθε $a, b, c \geq 0$.

Το παραπάνω θεώρημα αποδείχθηκε από τον Ευάγγελο Μουρούκο στο θέμα
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=111&t=30086.

Επίσης, δείτε το κεφάλαιο των κυκλικών ανισοτήτων του προαναφερθέντος βιβλίου Secrets in Inequalities - Vol. 2 που διατίθεται δωρεάν στο διαδίκτυο από τον εκδοτικό οίκο. Ιδιαίτερα, δείτε το Θεώρημα 3 στις σελ. 310-311 και το παράδειγμα 1.10.2 σελ. 312.

ΑΣΚΗΣΗ 40 *(Προτείνει ο Αλέξανδρος Μουσάτωφ) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{N}^*$ συνάρτηση έτσι ώστε*

$$f\left(x + \frac{1}{f(y)}\right) = f\left(y + \frac{1}{f(x)}\right)$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}^*$ που δεν ανήκει στις τιμές της f.

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=111&t=27499

Λύση (Δημήτρης Χριστοφίδης) Υποθέτουμε ότι η f είναι επί και θα καταλήξουμε σε άτοπο.

Για $n \in \mathbb{N}^*$ θέτουμε $A_n = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = n\}$. Επίσης αν $A \subseteq \mathbb{R}$ και $r \in \mathbb{R}$ με $A + r$ θα συμβολίζουμε το σύνολο $A + r = \{a + r : a \in A\}$.

Παρατήρηση 1: Για κάθε $m, n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει ότι $A_m + \frac{1}{n} \subseteq A_k$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}^*$. Πράγματι έστω $x, y \in A_m$ και έστω z τέτοιο ώστε $f(z) = n$. Τότε $f(x + 1/n) = f(x + 1/f(z)) = f(z + 1/f(x)) = f(z + 1/m)$ και ομοίως $f(y + 1/n) = f(z + 1/m)$.

Παρατήρηση 2: Για κάθε $m \in \mathbb{N}^*$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}^*$ ώστε $A_m + \frac{1}{n} \subseteq A_m$. Πράγματι αν $x \in A_m$ τότε $f(x + 1/f(x - 1/m)) = f(x - 1/m + 1/f(x)) = f(x) \in A_m$. Επομένως αν $f(x - 1/m) = n$, τότε $f(x + 1/n) \in A_m$ και από τη Παρατήρηση 1 πρέπει $A_m + \frac{1}{n} \subseteq A_m$.

Παρατήρηση 3: Για κάθε $m \in \mathbb{N}^*$ ισχύει ότι $A_m + 1 \subseteq A_m$. Πράγματι από την Παρατήρηση 2 παίρνουμε $n \in \mathbb{N}^*$

ώστε $A_m + \frac{1}{n} \subseteq A_m$. Αλλά τότε $A_m + \frac{2}{n} \subseteq A_m + \frac{1}{n} \subseteq A_m$ και επαγωγικά παίρνουμε $A_m + 1 \subseteq A_m$.

Παρατήρηση 4: Για κάθε $m \in \mathbb{N}^*$ ισχύει ότι $A_m + 1 = A_m$. Πράγματι έστω $x \in A_m$ και έστω k ώστε $x - 1 \in A_k$. Τότε από την Παρατήρηση 3 ισχύει ότι $x \in A_k$ και άρα $k = m$. Επομένως $A_m + 1 \supseteq A_m$ και από την Παρατήρηση 3 έχουμε το ζητούμενο.

Παρατήρηση 5: Για κάθε $m, n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει ότι $A_m + \frac{1}{n} = A_k$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}^*$. Πράγματι έστω k (από την Παρατήρηση 1) ώστε $A_m + \frac{1}{n} \subseteq A_k$. Τότε από την Παρατήρηση 4 έχουμε $A_m = A_m + 1 \subseteq A_k + \frac{n-1}{n}$. Από την Παρατήρηση 1 όμως επαγωγικά υπάρχει $\ell \in \mathbb{N}^*$ ώστε $A_k + \frac{n-1}{n} \subseteq A_\ell$. Αλλά τότε πρέπει $\ell = m$. Πάλι όμως από την Παρατήρηση 4 έχουμε $A_k = A_k + 1 \subseteq A_m + \frac{1}{n}$ οπότε το ζητούμενο έπεται.

Παρατήρηση 6: Για κάθε $m \in \mathbb{N}^*$ ισχύει ότι $A_1 + 1/m = A_m$. Πράγματι αν $x \in A_1$ και $y \in A_m$ τότε $f(x + 1/m) = f(x + 1/f(y)) = f(y + 1/f(x)) = f(y + 1) \in A_m$. Οπότε από την Παρατήρηση 5 πρέπει $A_1 + 1/m = A_m$.

Από την παρατήρηση 5 πρέπει να υπάχει $n \in \mathbb{N}^*$ ώστε $A_1 + 2/3 = A_n$. Έστω $q = 2/3 + (n-1)/n$. Τότε ο q δεν είναι ακέραιος επομένως $q = s/t$ για κάποιους πρώτους μεταξύ τους s, t με $t > 1$. Επομένως υπάρχει r ώστε $rq = k + 1/t$ για κάποιον ακέραιο k. Τότε όμως από τις προηγούμενες παρατηρήσεις έχουμε $A_1 = A_1 + 1 = A_1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{n-1}{n} = A_n + \dfrac{n-1}{n} = A_1 + q$ Επαγωγικά όμως παίρνουμε $A_1 = A_1 + rq = A_1 + k + 1/t = A_t$, άτοπο.

Σχόλιο: Πρόκειται για το shortlist πρόβλημα A6 της Διεθνούς Μαθηματικής Ολυμπιάδος του 2008.

Επιμελητής: Κώστας Βήττας

ΑΣΚΗΣΗ 41 *(Προτάθηκε από το Γρηγόρη Κακλαμάνο)* *Έστω τετράγωνο $ABCD$ και P, τυχόν σημείο του ελάσσονος τόξου $\overset{\frown}{AD}$ του περιγεγραμμένου κύκλου του (O), με $P \neq A \neq D$. Έστω $PR \parallel AD$ με $R \in AB$ και $PT \parallel AC$ με $T \in CD$. Εάν $S \equiv PB \cap AD$, να αποδειχθεί ότι τα σημεία R, S, T είναι συνευθειακά.*

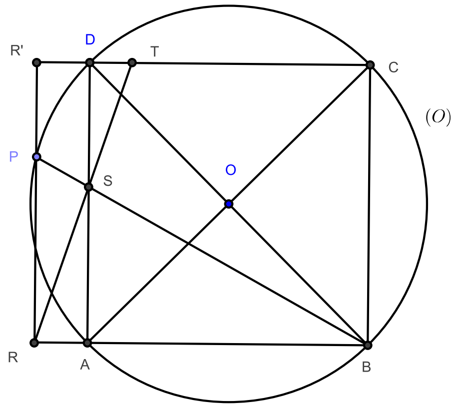
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=112&t=31032

Λύση 1 (Στάθης Κούτρας) Έστω το σημείο $R \equiv CD \cap RP$ και από $\angle TPD = \angle DBS$, λόγω της καθετότητας των πλευρών τους, στα όμοια (ως ισοσκελή) ορθογώνια τρίγωνα $\triangle R'PT$, $\triangle ABD$, προκύπτει ότι τα PD, BS είναι ομόλογα τμήματα.

Άρα,

$$\frac{DT}{DR'} = \frac{SD}{SA} \Longrightarrow \frac{DT}{AR} = \frac{SD}{SA} \qquad (1)$$

Από (1), σύμφωνα με το Θεώρημα Θαλή, συμπεραίνουμε ότι τα σημεία R, S, T είναι συνευθειακά και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.



Λύση 2 (Δημήτρης Παπαδημητρίου.) Έστω τα σημεία $Q \equiv AB \cap DP$ και $L \equiv CD \cap QS$.

Από $DA \perp BQ$ και $BP \perp DQ$, προκύπτει ότι το σημείο $S \equiv DA \cap BP$ ταυτίζεται με το ορθόκεντρο του τριγώνου $\triangle DBQ$ και άρα έχουμε

$$QS \equiv QL \perp BD \Longrightarrow QL \parallel PT \qquad (2)$$

Από (2) και $PR \parallel AD$ έχουμε ότι

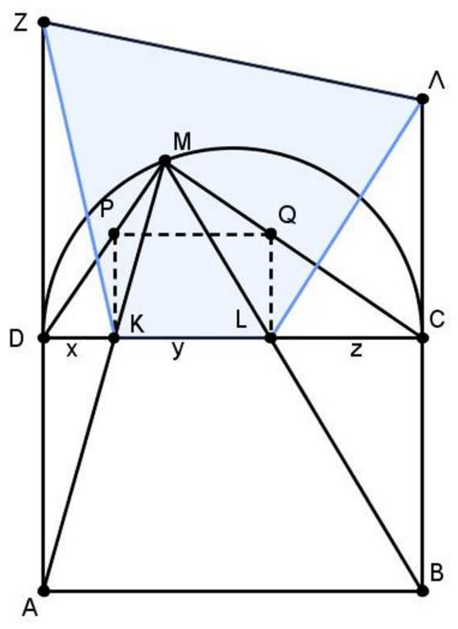
$$\frac{QR}{RA} = \frac{QP}{PD} = \frac{LT}{TD} \qquad (3)$$

Από (3), σύμφωνα με το Θεώρημα Θαλή, συμπεραίνεται ότι τα σημεία R, S, T είναι συνευθειακά και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

ΑΣΚΗΣΗ 42 *(Προτάθηκε από τον Νίκο Φραγκάκη.)* *Έστω ορθογώνιο $ABCD$ διαστάσεων $AB = a$, $BC = b$ με $a = b\sqrt{2}$. Με διάμετρο το CD και έξω από το ορθογώνιο, γράφουμε ημικλύκλιο. Ένα σημείο M, κινείται πάνω στο ημικύκλιο και οι MA, MB, τέμνουν την CD στα σημεία K, L, αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την AD πέραν του D κατά τμήμα $DZ = KC$ και την BC πέραν του C κατά τμήμα $CE = DL$. Να αποδειχθεί ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου $KLEZ$ είναι σταθερό και να υπολογιστεί ως έκφραση του a.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=112&t=31281

Λύση 1 (Αλέξανδρος Συγκελάκης)



Θέτουμε $DK = x$ και $KL = y$ και $LC = z$ και έχουμε :

$$\begin{aligned}(KLEZ) &= (DCEZ) - (DKZ) - (CLE)\\ &= \frac{DZ+EC}{2}\cdot(CD) -\\ &\quad - \frac{(DZ)(DK)}{2} - \frac{(CE)(CL)}{2}\\ (KLEZ) &= \frac{x+y+y+z}{2}\cdot(x+y+z) -\\ &\quad - \frac{x(y+z)}{2} - \frac{z(x+y)}{2}\\ &= \frac{(x+y+z)^2+y^2-2xz}{2} \qquad (1)\end{aligned}$$

Όμως, αν φέρουμε τις MC, MD και $KP \parallel AD$, $LQ \parallel BC$, τότε έχουμε διαδοχικά :

$$\frac{KP}{AD} = \frac{MK}{MA} = \frac{ML}{MB} = \frac{QL}{BC} = \frac{KL}{AB} \Longrightarrow PK = QL.$$

Έτσι, το $KLQP$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο όμοιο προς το αρχικό, οπότε ισχύει

$$(KL)^2 = 2(PK)^2 \qquad (2)$$

Από τα όμοια ορθογώνια τρίγωνα $\triangle\, KDP$, $\triangle\, LQC$ (γιατί έχουν $\angle KPD = \angle LCQ$, λόγω της καθετότητας των πλευρών τους) έχουμε :

$$\frac{DK}{QL} = \frac{PK}{CL} \Longrightarrow (DK)(CL) = (PK)^2 = \frac{(KL)^2}{2} \qquad (3)$$

λόγω της (2)

Από (2),(3) παίρνουμε $(KL)^2 = 2(DK)(CL) \Longrightarrow$

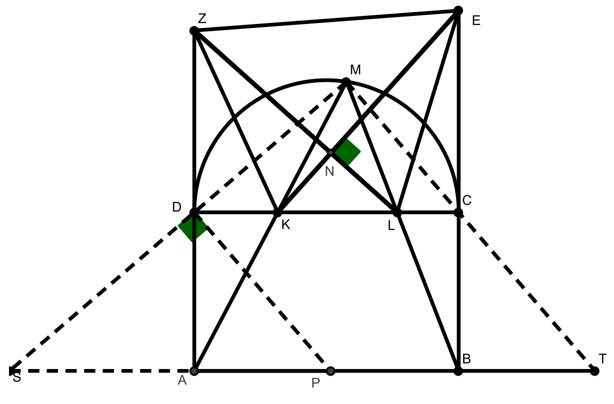
$$y^2 = 2xz \qquad (4)$$

Από (1),(4)

$$(KLEZ) = \frac{(x+y+z)^2}{2} = \frac{(CD)^2}{2} = \frac{a^2}{2} = ct$$

που είναι και το ζητούμενο.

Λύση 2 (Νίκος Φραγκάκης)



Έστω τα σημεία $S \equiv AB \cap MD$ και $T \equiv AB \cap MC$ και P, το σημείο τομής της ευθείας AB από την παράλληλη ευθεία προς την MT, δια του σημείου D.

Θέτουμε $SA = x$ και $BT = y$ και εύκολα προκύπτει ότι $AP = y$.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle\, DSP$ με $DA \perp SP$ έχουμε

$$\begin{aligned}(DA)^2 = (AS)(AP) &\Longrightarrow\\ b^2 = xy &\Longrightarrow\\ 2b^2 = 2xy &\Longrightarrow\\ a^2 = 2xy & \qquad (5)\end{aligned}$$

Από $DC \parallel ST$, σύμφωνα με το Θεώρημα Θαλή, έχουμε :

$$\frac{DL}{SB} = \frac{KC}{AT} = \frac{DC}{ST} = l \qquad (6)$$

Από (6) παίρνουμε

$$\begin{aligned}DL &= l(x+a) \qquad \text{και}\\ KC &= l(y+a) \qquad \text{και}\\ DC &= a = l(x+y+a) \qquad (7)\end{aligned}$$

Έτσι,

$$\begin{aligned}(DL)^2 + (KC)^2 &= l^2[(x+a)^2 + (y+a)^2] \Longrightarrow\\ (DL)^2 + (KC)^2 &= l^2[(x+y)^2 - 2xy + 2a^2 + 2a(x+y)] \Longrightarrow\\ (DL)^2 + (KC)^2 &= l^2(x+y+a)^2 = a^2 \qquad (8)\end{aligned}$$

λόγω της (7)

Από τα ίσα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle\, DLZ$, $\triangle\, CEK$ έχουμε

$$KE = LZ \quad \text{και} \quad KE \perp LZ \qquad (9)$$

γιατί οι ομόλογες πλευρές των γωνιών $\angle ZDL = 90^o = \angle KCE$, είναι κάθετες μεταξύ τους.

Επί πλέον, λόγω της (8) προκύπτει ότι

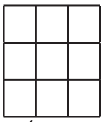
$$KE = LZ = a \qquad (10)$$

Από (9),(10), συμπεραίνεται ότι

$$(KLEZ) = \frac{(KE)(LZ)}{2} = \frac{a^2}{2}$$

που είναι και το ζητούμενο.

ΑΣΚΗΣΗ 43 *(Προτείνει ο Παύλος Μαραγκουδάκης - Θέμα διαγωνισμού «Ο ΘΑΛΗΣ» Γ Γυμνασίου 1995) Δύο μαθητές Α και Β χρησιμοποιούν έναν πίνακα* 3×3, *όπως στο σχήμα, για να παίξουν 'τρίλιζα'.*



Καθένας γράφει σ' ένα τετραγωνάκι της επιλογής του έναν σταυρό ή έναν κύκλο. Και οι δύο έχουν τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουν και το σταυρό και τον κύκλο, όποιο θέλουν σε κάθε τους κίνηση ανεξάρτητα με το τι χρησιμοποίησαν νωρίτερα. Θα νικήσει αυτός ο οποίος πρώτος γράφει ένα σύμβολο που είναι το ίδιο στα τρία τετράγωνα μιας γραμμής ή μιας στήλης ή μιας διαγωνίου του πίνακα. Για ποιον παίκτη υπάρχει σίγουρη στρατηγική νίκης·

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=105278

Λύση (Αλέξανδρος Γεωργακόπουλος) Ας συμβολίσουμε τα κουτάκια με τους αριθμούς 1 έως 9 όπως παρακάτω

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Ο παίκτης που παίζει πρώτος μπορεί να κερδίζει πάντα. Βάζει ένα κύκλο στο κέντρο δηλαδή στο 5. Αυτό αναγκάζει τον αντίπαλο του να παίξει σταυρό. Λόγω συμμετρίας όμως έχει μόνο δύο επιλογές:

(*A*) Να βάλει στη θέση 1. Τότε ο πρώτος βάζει σταυρό στη θέση 9. Ό,τι και να παίξει ο δεύτερος παίκτης χάνει στην επόμενη κίνηση.

(*B*) Να βάλει στη θέση 2. Τότε ο πρώτος βάζει σταυρό στη θέση 8. Ο δεύτερος τώρα για να μη χάσει στην επόμενη κίνηση θα βάλει σταυρό στη θέση 4. Τότε ο πρώτος θα βάλει σταυρό στη θέση 6 και ο δεύτερος θα χάσει στην επόμενη κίνηση.

ΑΣΚΗΣΗ 44 *(Προτείνει ο Αλέξανδρος Συγκελάκης- Θέμα 3ης Προκριματικής Φάσης Λυκείου 1995) Έστω $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ όπου n άρτιος και $a_n,\ a_{n-1}, \ldots, a_1,\ a_0 \in \mathbb{R}$. Αν $a_0 > 0$, $a_n > 0$ και $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2 \le \dfrac{4\min\left(a_0^2, a_n^2\right)}{n-1}$ (1), να αποδείξετε ότι $P(x) \ge 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.*

---

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=128218

Λύση (Αλέξανδρος Συγκελάκης) Αρχικά παραθέτω κάποια χρήσιμα λήμματα που θα χρειαστούν στη λύση της άσκησης:

Λήμμα 1 $\left|a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x\right| \le \sqrt{\left(a_{n-1}^2 + \cdots + a_2^2 + a_1^2\right)\left(x^{2(n-1)} + \cdots + x^4 + x^2\right)}$ (2) η οποία είναι άμεση εφαρμογή της ανισότητας Cauchy-Schwartz.

Λήμμα 2 Είναι $x^k \le \dfrac{kx^n + n - k}{n}$ (3) για n, k φυσικούς με $k \le n$. Για την απόδειξη απλά χρησιμοποιούμε την ανισότητα ΑΜ-ΓΜ:

$$\begin{aligned}\frac{kx^n + n - k}{n} &= \frac{\overbrace{x^n + x^n + \cdots + x^n}^{k} + \overbrace{1 + 1 + \cdots + 1}^{n-k}}{n}\\ &\ge \sqrt[n]{x^{kn}} = x^k\end{aligned}$$

Λήμμα 3 Είναι $x^m \le \dfrac{(x^m+1)^2}{4}$ (4) που προκύπτει άμεσα είτε με πράξεις είτε με εφαρμογή της ανισότητας ΑΜ-ΓΜ.

Λήμμα 4 $(x^n+1)^2(n-1) \ge 4\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} x^{2k}$ (5) για n άρτιο. Για την απόδειξη θα δείξουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{2m-1} x^k \le \frac{2m-1}{4}(x^m+1)^2 \quad (6)$$

Πράγματι

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2m-1} x^k &= x^m + (x^m+1)\sum_{k=1}^{m-1} x^k\\ &\overset{(3)}{\le} x^m + (x^m+1)\sum_{k=1}^{m-1}\frac{kx^m + m - k}{m}\\ &= x^m + \frac{m-1}{2}(x^m+1)^2\\ &\overset{(4)}{\le} \frac{2m-1}{4}(x^m+1)^2\end{aligned}$$

Θέτουμε τώρα στην (6) όπου x το x^2 και όπου $2m$ το n κι έτσι παίρνουμε την (5). **Λύση της άσκησης**

$$\begin{aligned}
P(x) &= (a_n x^n + a_0) + \left(a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x\right) \\
&\geq (a_n x^n + a_0) - \left|a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x\right| \\
&\overset{(2)}{\geq} \sqrt{\min(a_0^2, a_n^2)}\,|x^n + 1| \\
&- \sqrt{\left(a_{n-1}^2 + \cdots + a_2^2 + a_1^2\right)(x^{2(n-1)} + \cdots + x^4 + x^2)} \\
&\overset{(1)}{\geq} \sqrt{\min(a_0^2, a_n^2)}\frac{(x^n + 1)\sqrt{n-1} - 2\sqrt{x^{2(n-1)} + \cdots + x^2}}{\sqrt{n-1}} \\
&\overset{(5)}{\geq} 0
\end{aligned}$$

Επιμελητής: Δημήτρης Χριστοφίδης

ΑΣΚΗΣΗ 45 *(Από τον διαγωνισμό IMC του 2012) Ορίζουμε την ακολουθία* $a_0, a_1, \ldots$ *ως* $a_0 = 1$, $a_1 = \dfrac{1}{2}$ *και* $a_{n+1} = \dfrac{na_n^2}{1+(n+1)a_n}$ *για* $n \geq 1$. *Να δείξετε ότι η σειρά* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ *συγκλίνει και να βρείτε την τιμή της.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=59&t=28869

Λύση (Ηλίας Ζαδίκ) Είναι

$$na_n - (n+1)a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \qquad (1)$$

για κάθε $n \geq 1$. Τώρα επαγωγικά για κάθε n έχουμε $a_n > 0$. Έτσι na_n θετική φθίνουσα με όριο ℓ. Για να το βρούμε παίρνουμε όρια στην (1) και καταλήγουμε $\ell = 0$. Τέλος αθροίζοντας την (1) για $n \geq 1$ τηλεσκοπικά παίρνουμε

$$\sum_{n \geq 1} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a_1 - \lim(na_n) = a_1.$$

Άρα το ζητούμενο άθροισμα συγκλίνει και είναι ίσο με $\frac{a_1}{a_0} + a_1 = 1$.

ΑΣΚΗΣΗ 46 *(Από τον διαγωνισμό IMC του 2012) Είναι το σύνολο των θετικών ακεραίων* n *για τους οποίους ο αριθμός* $n!+1$ *διαιρεί τον* $(2012n)!$, *πεπερασμένο ή άπειρο·*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=59&t=28870

Λύση 1 (Νίκος Κολλιόπουλος) Η απάντηση είναι το πεπερασμένο. Γράφουμε:

$$\begin{aligned}(2012n)! &= n! \times \frac{(2n)!}{n!} \times \cdots \times \frac{(2012n)!}{(2011n)!} \\ &= (n!)^{2012} \binom{2n}{n} \times \binom{3n}{n} \times \cdots \times \binom{2012n}{n}\end{aligned}$$

που διαιρείται με $(n!)^{2012}$.

Επειδή $((n!)^{2012}, n!+1) = 1$ και $(n!+1)|(2012n)!$ τότε

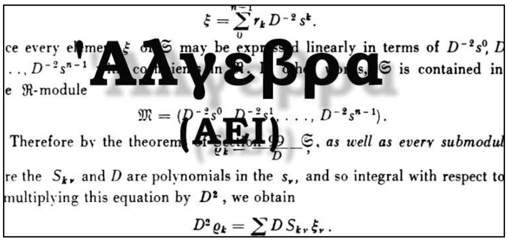
$$(n!)^{2012}(n!+1)|(2012n)! \Rightarrow \frac{(2012n)!}{(n!)^{2012}(n!+1)} \geq 1$$

το οποίο δεν μπορεί να συμβαίνει για άπειρους n καθώς από Strirling έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{(2012n)!}{(n!)^{2012}(n!+1)} \sim \frac{(2012n)!}{(n!)^{2013}} &\sim \frac{\sqrt{2\pi 2012n}(\frac{2012n}{e})^{2012n}}{\sqrt{2\pi n}^{2013}(\frac{n}{e})^{2013n}} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi 2012n}(\frac{2012n}{e})^{2012n}}{\sqrt{2\pi n}^{2013}(\frac{n}{e})^{2012n}(\frac{n}{e})^{n}} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi 2012n}(2012)^{2012n}}{\sqrt{2\pi n}^{2013}(\frac{n}{e})^{n}} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi 2012n}}{\sqrt{2\pi n}^{2013}(\frac{n}{2012^{2012}e})^{n}}\end{aligned}$$

που τείνει προφανώς στο 0.

Λύση 2 (Δημήτρης Χριστοφίδης) Αν $(n!+1)|(2012n!)$ τότε κάθε πρώτος που διαιρεί τον $n!+1$ πρέπει να ανήκει στο διάστημα $(n+1, 2012n)$. Επομένως η μεγαλύτερη δύναμη του p που διαιρεί τον $n!+1$ είναι 2011. Από το θεώρημα των πρώτων αριθμών, για n αρκετά μεγάλο, έχουμε το πολύ $2013n/\log(2012n)$ πρώτους σε αυτό το διάστημα όλους μικρότερους του $2012n$ άρα πρέπει $(2012n)^{2011\cdot\frac{2013n}{\log(2012n)}} = e^{2011\cdot 2013n} > n!+1$ το οποίο για n αρκετά μεγάλο είναι άτοπο από Stirling.



Επιμελητής: Δημήτρης Χριστοφίδης

ΑΣΚΗΣΗ 47 *(Προτείνει ο Θανάσης Κοντογεώργης) Έστω ομάδα G με n στοιχεία και $a, b \in G \setminus \{e\}$, $m \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $ab = b^m a$. Να δείξετε ότι $b^{\frac{n}{(m,n)}} = e$.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=10&t=31024

Λύση (Παναγιώτης Λώλας)

Από το θεώρημα Lagrange $x^n = 1$ για κάθε x στην G και ακόμη $(a^{-1}ba)^m = a^{-1}b^m a = b$. Υψώνοντας την τελευταία στην δύναμη $\dfrac{n}{(m,n)}$ παίρνουμε το ζητούμενο.

ΑΣΚΗΣΗ 48 *(Προτείνει ο Σπύρος Καπελλίδης) Αν G είναι μία ομάδα τάξης $2(2n+1)$, (όπου $n \in \mathbb{N}$), να αποδειχθεί ότι έχει το πολύ μία υποομάδα τάξης $2n+1$.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=10&t=31056

Λύση (Αχιλλέας Συνεφακόπουλος)

Έστω H, K δυο υποομάδες της G με $|H| = |K| = 2n+1$. Τότε

$$|HK| = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap K|} = \frac{(2n+1)^2}{|H \cap K|}.$$

Από εδώ μπορούμε να προχωρήσουμε με δυο τρόπους:

1ος τρόπος: Οι H, K είναι κανονικές υποομάδες της G, αφού είναι δείκτη 2. Συνεπώς, η HK είναι κανονική υποομάδα της G τάξεως $\dfrac{(2n+1)^2}{|H \cap K|}$, η οποία από το θεώρημα Lagrange διαιρεί το $2(2n+1) = |G|$. Συνεπώς, ο $\dfrac{2n+1}{|H \cap K|}$ είναι διαιρέτης του 2, και μάλιστα περιττός, οπότε $|H \cap K| = 2n+1 = |H| = |K|$. Συνεπώς, $H = K$.

2ος τρόπος: Είναι $HK \subseteq G$, οπότε

$$\frac{(2n+1)^2}{|H \cap K|} \leq 2(2n+1),$$

που μας δίνει $|H \cap K| \geq n + \dfrac{1}{2}$, δηλαδή $|H \cap K| \geq n+1$. Αλλά, από το θεώρημα Lagrange ο $|H \cap K|$ διαιρεί τον $|H| = 2n+1$. Αφού δεν υπάρχει διαιρέτης του $2n+1$ μεγαλύτερος του n, άλλος από τον $2n+1$, θα είναι $|H \cap K| = 2n+1 = |H| = |K|$. Συνεπώς, $H = K$.

Ανάλυση (ΑΕΙ)

Επιμελητής: Γρηγόρης Κωστάκος

ΑΣΚΗΣΗ 49 *(Προτάθηκε από το Σεραφείμ Τσιπέλη) Να αποδειχθεί ότι*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{n^2+1} =$$

$$\arctan\left(\tan\left(\pi\sqrt{\tfrac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)\frac{e^{\pi\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}}+e^{-\pi\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}}}{e^{\pi\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}}-e^{-\pi\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}}}\right)-\frac{\pi}{8}.$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=9&t=23581

Λύση (Κοτρώνης Αναστάσιος) Χρησιμοποιούμε τα εξής γνωστά:

$$\tan^{-1} z = \frac{i}{2}\ln\left(\tfrac{i+z}{i-z}\right) \qquad z\in\mathbb{C}\setminus\{\pm i\}, \qquad (1)$$

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \qquad x>0, \qquad (2)$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} = \Gamma(z) \qquad z\in\mathbb{C}\setminus -\mathbb{N}_0, \qquad (3)$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \qquad z\in\mathbb{C}\setminus -\mathbb{N}_0, \qquad (4)$$

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \qquad z\in\mathbb{C}\setminus Z_0 \qquad (5)$$

Λήμμα: Έστω $z := x+iy$ μιγαδικός με $x\neq k+\frac{1}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$ και $y\neq 0$. Τότε

$$\frac{\sin(\pi z)}{\sin(\pi\overline{z})} = \frac{i\tan(\pi x)\coth(\pi y)-1}{i\tan(\pi x)\coth(\pi y)+1}.$$

Απόδειξη: Είναι

$$\frac{\sin(\pi z)}{\sin(\pi\overline{z})}$$

$$= \frac{e^{i\pi x}e^{-\pi y}-e^{-i\pi x}e^{\pi y}}{e^{i\pi x}e^{\pi y}-e^{-i\pi x}e^{-\pi y}}$$

$$= \frac{-(e^{i\pi x}+e^{-i\pi x})(e^{\pi y}-e^{-\pi y})+(e^{i\pi x}-e^{-i\pi x})(e^{\pi y}+e^{-\pi y})}{(e^{i\pi x}+e^{-i\pi x})(e^{\pi y}-e^{-\pi y})+(e^{i\pi x}-e^{-i\pi x})(e^{\pi y}+e^{-\pi y})}$$

$$= \frac{-1+i\tan(\pi x)\coth(\pi y)}{1+i\tan(\pi x)\coth(\pi y)}. \qquad \square$$

Θέτοντας $z := \sqrt[4]{2}\exp\left(\frac{3\pi i}{8}\right) = x+iy$ παίρνουμε

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\tan^{-1}\frac{1}{k^2+1}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\tan^{-1}\frac{1}{k^2+1}$$

$$\overset{(1)}{=} \frac{i}{2}\ln\left(\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{i+(k^2+1)^{-1}}{i-(k^2+1)^{-1}}\right)$$

$$= \frac{i}{2}\ln\left(\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{k^2-(-1+i)}{k^2-(-1-i)}\right)$$

$$= \frac{i}{2}\ln\left(\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{k^2-z^2}{k^2-\overline{z}^2}\right)$$

$$= \frac{i}{2}\ln\left(\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=0}^{n}\frac{(k+1)^2-z^2}{(k+1)^2-\overline{z}^2}\right)$$

$$= \frac{i}{2}\ln\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n!n^{1-z}}\prod_{k=0}^{n}(k+1-z)\frac{1}{n!n^{1+z}}\prod_{k=0}^{n}(k+1+z)}{\frac{1}{n!n^{1-\overline{z}}}\prod_{k=0}^{n}(k+1-\overline{z})\frac{1}{n!n^{1+\overline{z}}}\prod_{k=0}^{n}(k+1+\overline{z})}\right)$$

$$\overset{(3)}{=} \frac{i}{2}\ln\left(\frac{\Gamma(1-\overline{z})\Gamma(1+\overline{z})}{\Gamma(1-z)\Gamma(1+z)}\right)$$

$$\overset{(4),(5)}{=} \frac{i}{2}\ln\left(\frac{\overline{z}}{z}\frac{\sin(\pi z)}{\sin(\pi\overline{z})}\right)$$

$$= \frac{i}{2}\ln\left(\exp\left(-\frac{3\pi i}{4}\right)\frac{\sin(\pi z)}{\sin(\pi\overline{z})}\right)$$

$$= \frac{3\pi}{8}+\frac{i}{2}\ln\left(\frac{\sin(\pi z)}{\sin(\pi\overline{z})}\right)$$

$$\overset{\text{Λήμμα}}{=} \frac{3\pi}{8}+\frac{i}{2}\ln\left(\frac{-1+i\tan(\pi x)\coth(\pi y)}{1+i\tan(\pi x)\coth(\pi y)}\right)$$

$$\overset{A:=\tan(\pi x)\coth(\pi y)\neq 0}{=} \frac{3\pi}{8}+\frac{i}{2}\ln\left(\frac{i-A^{-1}}{i+A^{-1}}\right)$$

$$\overset{(1)}{=} \frac{3\pi}{8}+\tan^{-1}\left(-\frac{1}{A}\right)$$

$$\overset{A>0,(2)}{=} \frac{3\pi}{8}-\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}A\right)$$

$$= \tan^{-1}(\tan(\pi x)\coth(\pi y))-\frac{\pi}{8}$$

$$= \tan^{-1}\left(\tan\left(\pi\sqrt[4]{2}\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)\coth\left(\pi\sqrt[4]{2}\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)\right)-\frac{\pi}{8}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 50 *(Προτάθηκε από το Σπύρο Καπελλίδη) Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει συνάρτηση* $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$*, για την οποία αληθεύει η συνεπαγωγή:*

$$x\in\mathbb{Q},\ y\in\mathbb{R}-\mathbb{Q} \quad\Rightarrow\quad f(x)f(y)\leq|x-y|.$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=9&t=5563

Λύση 1 (Δημήτρης Σκουτέρης) Έστω f_i ο περιορισμός της f στους άρρητους και f_r ο περιορισμός της f στους ρητούς.

Τοτε, από τη δεδομένη σχέση, για $q \in \mathbb{Q}$ ισχύει $\lim_{x\to q} f_i(x) = 0$. Επίσης, για $r \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ισχύει $\lim_{x\to r} f_r(x) = 0$.

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Από τα δυο παραπάνω όρια ισχύει ότι για κάθε περιοχή τού $\mathbb{R}$ υπάρχει ανοικτή υποπεριοχή τής I_n με $f(I_n) \subseteq (0, 1/n)$. Το σύνολο $A_n \equiv f^{-1}(0, 1/n)$ έχει λοιπόν ανοικτό και πυκνό υποσύνολο.

Οπότε, απο το θεώρημα Baire, το σύνολο $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \varnothing$ είναι πυκνό, που είναι άτοπο. □

Λύση 2 (Σπύρος Καπελλίδης) Αν $x \in \mathbb{Q}$ και $y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, τότε για κάθε ακολουθία ρητών x_n, που έχει όριο το y, έχουμε προφανώς $f(x_n) \to 0$. Αλλά και για κάθε ακολουθία αρρήτων y_n, που έχει όριο το x έχουμε $f(y_n) \to 0$.

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $h(x) = f(x),\ x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ και $h(x) = 0,\ x \in \mathbb{Q}$. Είναι φανερό πως το σύνολο των σημείων της συνέχειας της είναι το $\mathbb{Q}$, άτοπο, γιατί ως γνωστόν το σύνολο των σημείων συνέχειας μιας συνάρτησης είναι ένα σύνολο G_δ, ενώ το $\mathbb{Q}$ δεν είναι σύνολο G_δ. □

Μαθηματική Λογική & Θεμέλια Μαθηματικών (ΑΕΙ)

Επιμελητής: Δημήτρης Σκουτέρης

ΑΣΚΗΣΗ 51 *(Προτείνει ο Σπύρος Καπελλίδης) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία γνησίως μονότονη συνάρτηση. Αν για τις μονότονες συναρτήσεις $h,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει*

$$g(f(x)) = h(f(x)) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

να αποδειχθεί ότι $g = h$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=64&t=15097

Λύση (hsiodos) Χωρίς βλάβη θεωρούμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Έχουμε ακόμη

$$g(f(x)) = h(f(x)) = x \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

- Οι συναρτήσεις g, h είναι αύξουσες . Πράγματι αν η g (όμοια και για την h) ήταν φθίνουσα τότε

$$\text{αν } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ με } x_1 < x_2 \overset{f \text{ γν αύξ}}{\Longrightarrow}$$
$$f(x_1) < f(x_2) \overset{g\downarrow}{\Longrightarrow}$$
$$g\left(f(x_1)\right) \geq g\left(f(x_2)\right) \overset{(1)}{\Longrightarrow} x_1 \geq x_2,$$

  άτοπο.

- Αν $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ το ζητούμενο ισχύει (απόδειξη πιο πάνω)

- Αν $f(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}$ τότε για κάθε $x \in f(R)$ το ζητούμενο ισχύει (ομοίως)

- Η λύση θα ολοκληρωθεί αν αποδείξουμε ότι $g(y) = h(y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R} - f(\mathbb{R})$.

  Έστω $y \in \mathbb{R} - f(\mathbb{R})$.

  Έχουμε τις περιπτώσεις:

  1. $$f(x) > y \quad \text{γιά κάθε} \quad x \in \mathbb{R}. \qquad (2)$$

     $$(2) \overset{x=h(y)}{\Rightarrow} f\left(h(y)\right) > y \overset{g\uparrow}{\Rightarrow}$$
     $$g\left(f\left(h(y)\right)\right) \geq g(y) \overset{(1)}{\Rightarrow}$$
     $$h(y) \geq g(y) \qquad (3)$$

     $$(2) \overset{x=g(y)}{\Rightarrow} f\left(g(y)\right) > y \overset{h\uparrow}{\Rightarrow}$$
     $$h\left(f\left(g(y)\right)\right) \geq h(y) \overset{(1)}{\Rightarrow}$$
     $$g(y) \geq h(y) \qquad (4)$$

     $$(3) \wedge (4) \Rightarrow g(y) = h(y).$$

  2. $f(x) < y$ γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$ (Ομοίως)

  3. Υπάρχει $x \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε για κάθε $h > 0$ να ισχύει

     $$f(x) < y < f(x+h) \qquad (5)$$

     (Διαφορετικά αναγόμαστε στις 2 προηγούμενες περιπτώσεις)

     $$(5) \overset{g\uparrow}{\Rightarrow} g(f(x)) \leq g(y) \leq g(f(x+h)) \overset{(1)}{\Rightarrow}$$
     $$x \leq g(y) \leq x+h \Rightarrow$$
     $$\lim_{h\to0^+} x \leq \lim_{h\to0^+} g(y) \leq \lim_{h\to0^+}(x+h) \Rightarrow$$
     $$x \leq g(y) \leq x \Rightarrow$$
     $$g(y) = x$$

     και όμοια $h(y) = x$ οπότε $g(y) = h(y)$. Επομένως

     $$g(x) = h(x) \quad \text{γιά κάθε} \quad x \in \mathbb{R}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 52 *(Προτείνει ο Σπύρος Καπελλίδης) Να ορισθεί στο σύνολο των πραγματικών σχέση ολικής διάταξης, ώστε κάθε πραγματικός να έχει αμέσως προηγούμενο και αμέσως επόμενο.*

http://www.mathematica.gr/forum/posting.php?mode=edit&f=64&p=50975

Λύση (Δημήτρης Χριστοφίδης) Ορίζω $x > y$ αν και μόνο αν $(\{x\} > \{y\})$ ή $\Big((\{x\} = \{y\}) \quad \text{και} \quad (\lfloor x \rfloor > \lfloor y \rfloor)\Big)$ όπου $\lfloor x \rfloor$ είναι το ακέραιο μέρος του x και $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Τότε η διάταξη είναι ολική, ο αμέσως επόμενος του x είναι ο $x+1$ και ο αμέσως προηγούμενος του x είναι ο $x-1$.

Θεωρία Αριθμών (ΑΕΙ)

Επιμελητής: Νίκος Κατσίπης

ΑΣΚΗΣΗ 53 *(Προτείνει ο Γιώργος Παπαδόπουλος)* *Αν n είναι φυσικός περιττός, να βρεθούν τα δυο τελευταία ψηφία του* $2^{2n}\left(2^{2n+1}-1\right)$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=63&t=30730

Λύση $A=2^{2n}\left(2^{2n+1}-1\right), \quad n=1,3,5,..$ δηλαδή πρέπει να βρούμε τα δυο τελευταία ψηφία του

$$A=2^{2(2k+1)}\left(2^{2(2k+1)+1}-1\right), \quad k=0,1,2,3,...$$

Θα αποδείξουμε με επαγωγή ότι

$$A(k)=2^{2(2k+1)}\left(2^{2(2k+1)+1}-1\right)=100\cdot m+28, \quad m\in\mathbb{N}.$$

- Για $k=0$: $A=2^2\left(2^{2+1}-1\right)=4\cdot 7=28.$
- Έστω
  $$A(k)=2^{2(2k+1)}\left(2^{2(2k+1)+1}-1\right)=100\cdot m+28,$$
  $m\in\mathbb{N}$,
- τότε
  $$\begin{aligned} A(k+1) &= 16\cdot 2^{2(2k+1)}\left(16\cdot 2^{2(2k+1)+1}-1\right) \\ &= 16\cdot 2^{2(2k+1)}\left(2^{2(2k+1)+1}-1\right) \\ &\quad + 16\cdot 15\cdot 2^{2(2k+1)}\cdot 2^{2(2k+1)+1} \\ &= 16\cdot(100\cdot m+28) \\ &\quad + 16\cdot 15\cdot 2^{2(2k+1)}\cdot 2^{2(2k+1)+1} \\ &= 100\cdot(16m)+28+60\left(7+4\cdot 32\cdot 2^{8k}\right) \end{aligned}$$

  Αρκεί

  $$\begin{aligned} 60\left(7+4\cdot 32\cdot 2^{8k}\right)=100\cdot x &\Leftrightarrow \\ 42+24\cdot 32\cdot 2^{8k}=10\cdot x &\Leftrightarrow \\ 21+12\cdot 32\cdot 2^{8k}=5\cdot x &\Leftrightarrow \\ 21+384\cdot 2^{8k}=5\cdot x & \end{aligned}$$

  Αρκεί $1+2^{8k+2}=$ πολ 5 το οποίο είναι απλό κατά τετριμμένο τρόπο.

  Άρα τα δύο τελευταία ψηφία του αριθμού $A=2^{2n}\left(2^{2n+1}-1\right), \quad n=1,3,5,..$ είναι 28.

ΑΣΚΗΣΗ 54 *(Προτείνει ο Γιώργος Παπαδόπουλος)*

$$\begin{aligned} &1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+ \\ &+\ldots+2001^2-2002^2+2003^2\equiv\ ? \pmod{2005}. \end{aligned}$$

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=63&t=30853

Λύση 1 (Δημήτρης Χριστοφίδης)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2003}(-1)^{k+1}k^2 &\equiv \\ 1+\sum_{k=2}^{1002}[(-1)^{k+1}k^2+(-1)^{2005-k+1}(2005-k)^2] &\equiv \\ 1 \bmod 2005 & \end{aligned}$$

Στην τελευταία ισοδυναμία χρησιμοποιήσαμε ότι

$$\begin{aligned} (-1)^{2005-k+1}(2005-k)^2 &= -(-1)^{k+1}(2005-k)^2 \\ &\equiv -(-1)^{k+1}k^2 \bmod 2005. \end{aligned}$$

Λύση 2 (Γιώργος Παπαδόπουλος)

$$\begin{aligned} &1^2\underbrace{-2^2+3^2-4^2+\ldots-2000^2+2001^2-2002^2+2003^2}_{2002\text{όροι}}= \\ &1+\left[2003^2-2002^2+2001^2-\ldots-4^2+3^2-2^2\right]= \\ &1+\left(2003^2-2^2\right)-\left(2002^2-3^2\right)-\ldots+\left(1003^2-1002^2\right)= \\ &1+2005(2003-2)-2005(2002-3)+ \\ &\qquad 2005(2001-4)-\ldots+2005(1003-1002)\equiv \\ &1 \pmod{2005}. \end{aligned}$$

Ανώτερα Μαθηματικά (ΑΕΙ)

Επιμελητής: Σεραφείμ Τσιπέλης

ΑΣΚΗΣΗ 55 *(Προτείνει ο Δημήτρης Χριστοφίδης) Να υπολογιστεί η πληθικότητα του συνόλου των μονότονων συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=13&t=15569

Λύση (Σπύρος Καπελλίδης) Ας ονομάσουμε το $\mathcal{M}$ σύνολο των μονότονων συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$

Αν $f \in \mathcal{M}$ και S_f είναι το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της, τότε $card(S_f) \leq \aleph_0$

Έστω $X \subset \mathbb{R}$ με $card(X) \leq \aleph_0$ και $\mathcal{M}_X$ είναι το σύνολο των μονότονων συναρτήσεων για τις οποίες

$S_f \subset X$, προφανώς $card(S_f) \leq \aleph_0$.

Κάθε τέτοια συνάρτηση ορίζεται μονοσήμαντα από τον περιορισμό της στο $X \cup \mathbb{Q}$ και υπάρχουν τέτοιες

συναρτήσεις το πλήθος των οποίων είναι το πολύ ίσο με το συνεχές c.

Άρα $card(\mathcal{M}_X) \leq c$

Επειδή

το πλήθος των συνόλων $\mathcal{M}_X$ είναι ίσο το πολύ c.

Έτσι $\mathcal{M} = \bigcup_X \mathcal{M}_X \Rightarrow card(\mathcal{M}) \leq c$

Εξ άλλου όλες οι συναρτήσεις $f(x) = x + a, a \in \mathbb{R}$ είναι μονότονες, άρα $card(\mathcal{M}) \geq c$

Συνεπώς $card(\mathcal{M}) = c$

ΑΣΚΗΣΗ 56 *(Προτείνει ο Δημήτρης Σκουτέρης) Έστω $S = \{a_1, a_2, a_3, ..., a\}$ όπου (a_n) πραγματική ακολουθία $1-1$ με $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$.*
Αποδείξτε ότι το S δε μπορεί να διαμεριστεί σε 2 ή περισσότερα ομοιομορφικά υποσύνολα (με τη συνήθη τοπολογία).

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=13&t=14065

Λύση (Σπύρος Καπελλίδης) Έστω ότι υπάρχει τέτοια διαμέριση σε σύνολα S_1, S_2.

Άρα υπάρχει συνάρτηση $f : S_1 \to S_2$ οποία είναι $1-1$, επί, συνεχής

Εφ΄ όσον η f είναι $1-1$ θα έχουμε

$card(S_1) = card(f(S_1)) = card(S_2)$ κι επειδή

$card(S_1 \cup S_2) = cardS = \aleph_0$

Θα έχουμε $card(S_1) = card(S_2) = \aleph_0$

Έστω πως $a \in S_1$

Γράφουμε τα στοιχεία του $S_1 - \{a\}$ ως μία ακολουθία b_n

Τότε τα στοιχεία του $S_2 - \{f(a)\}$ θα είναι η ακολουθία $f(b_n)$

Έχουμε $b_n \to a \wedge f(b_n) \to f(a)$ λόγω της συνέχειας και $a \neq f(a)$ επειδή $S_1 \cap S_2 = \varnothing$,

άρα η a_n έχει δύο υπακολουθίες με διαφορετικά όρια, άτοπο

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται η αδυναμία διαμέρισης σε Κ ομοιομορφικά υποσύνολα.

Προτεινόμενα Θέματα Μαθηματικών (ΑΣΕΠ)

Επιμελητής: Χρήστος Κυριαζής

ΑΣΚΗΣΗ 57 *(Προτάθηκε από το Σπύρο Καπελλίδη)* *Έστω* $a, x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$ *και* $a \geq 2$.
Αν

$$A = cosx_1 + \frac{cosx_2}{a} + \frac{cosx_3}{a^2} + ... + \frac{cosx_n}{a^{n-1}}$$

και

$$B = sinx_1 + \frac{sinx_2}{a} + \frac{sinx_3}{a^2} + ... + \frac{sinx_n}{a^{n-1}},$$

να δειχθεί ότι $A^2 + B^2 > 0$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=27&t=31000

Λύση 1 (Ευάγγελος Μουρούκος)

Ισχυρισμός: Έστω $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$, $a \in \mathbb{R}$ με $a \geq 2$ και $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ με $|z_1| = |z_2| = \cdots = |z_n| = 1$. Τότε, ισχύει $\left|a^{n-1}z_1 + a^{n-2}z_2 + \cdots + az_{n-1} + z_n\right| \geq 1$.

Απόδειξη του Ισχυρισμού: Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο n.

- Για $n = 2$, έχουμε ότι

$$|az_1 + z_2| \geq ||az_1| - |z_2|| = a - 1 \geq 1$$

  και άρα ο Ισχυρισμός αληθεύει.

- Υποθέτουμε ότι ο Ισχυρισμός είναι αληθής για το φυσικό αριθμό $n \geq 2$.

- Τότε, είναι:

$$\begin{aligned}&\left|a^n z_1 + a^{n-1}z_2 + \cdots + a^2 z_{n-1} + az_n + z_{n+1}\right| \geq \\ &\left|\left|a^n z_1 + a^{n-1}z_2 + \cdots + a^2 z_{n-1} + az_n\right| - |z_{n+1}|\right| = \\ &\left| a\underbrace{\left|a^{n-1}z_1 + a^{n-2}z_2 + \cdots + az_{n-1} + z_n\right|}_{\geq 1} - 1\right| \geq \\ &a - 1 \geq 1,\end{aligned}$$

  οπότε ο Ισχυρισμός είναι αληθής για το φυσικό αριθμό $n+1$ και το ζητούμενο έπεται επαγωγικά.

Θέτουμε τώρα για $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$z_j := \cos x_j + i \sin x_j,$$

οπότε $\left|z_j\right| = 1$ και από τον Ισχυρισμό είναι

$$\begin{aligned}\sqrt{A^2 + B^2} = |A + iB| &= \left|z_1 + \frac{z_2}{a} + \cdots + \frac{z_n}{a^{n-1}}\right| \\ &= \frac{1}{a^{n-1}}\left|a^{n-1}z_1 + a^{n-2}z_2 + \cdots + az_{n-1} + z_n\right| \\ &\geq \frac{1}{a^{n-1}} > 0.\end{aligned}$$

Λύση 2 (Αθανάσιος Μάγκος) Ας υποθέσουμε ότι $A = B = 0$.

Τότε, είναι

$$A + iB = z_1 + bz_2 + \cdots + b^{n-1}z_n = 0,$$

όπου $b = \frac{1}{a} \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ και $z_j = \cos x_j + i \sin x_j$, άρα

$$\begin{aligned}bz_2 + \cdots + b^{n-1}z_n = -z_1 &\implies \\ |bz_2 + \cdots + b^{n-1}z_n| = 1 &\implies \\ 1 \leq b + b^2 + \cdots b^{n-1} &\implies \\ 1 \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} &\implies 1 \leq 1 - \frac{1}{2^{n-1}},\end{aligned}$$

άτοπο.

ΑΣΚΗΣΗ 58 *(Προτάθηκε από τον Αθανάσιο Μάγκο)* *Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι* n, *για τους οποίους ισχύει*

$$\frac{\sin(na)}{\sin a} - \frac{\cos(na)}{\cos a} = n - 1,$$

για κάθε $a \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=27&t=30159

Λύση 1 (Νίκος Ζανταρίδης) Εστω ότι για κάθε $a \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ ισχύει

$$\frac{\sin(na)}{\sin a} - \frac{\cos(na)}{\cos a} = n - 1 \qquad (1)$$

Από την (1) προκύπτει ότι για κάθε $a \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ ισχύει

$$\sin\left((n-1)\,a\right) = \frac{n-1}{2}\sin(2a). \tag{2}$$

Απο την (2) παραγωγίζοντας διαδοχικά τρεις φορες ως προς a προκύπτει ότι για κάθε $a \neq \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ ισχύει

$$(n-1)^3 \cos\left((n-1)\,a\right) = 4\,(n-1)\cos(2a),$$

οπότε είναι

$$\begin{aligned} \lim_{a\to 0}\left[(n-1)^3\cos\left((n-1)\,a\right)\right] &= \lim_{a\to 0}\left[4\,(n-1)\cos(2a)\right] &\Rightarrow \\ (n-1)^3 &= 4\,(n-1) &\Rightarrow \\ n=1 \quad \text{ή} \quad n=-1 \quad &\text{ή} \quad n=3 \end{aligned}$$

Ειναι εύκολο να διαπιστωθει ότι οι τιμές αύτες ικανοποιούν την (1) για κάθε $a \neq \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$,οπότε είναι οι ζητούμενες.

Λύση 2 (Δημήτρης Χριστοφίδης) Για $a = \pi/4$ παίρνουμε

$$\sin(n\pi/4) - \cos(n\pi/4) = (n-1)\sqrt{2}/2$$

που δίνει

$$\sin((n-1)\pi/4) = (n-1)/2.$$

Το δεξί μέλος πρέπει σε απόλυτη τιμή να είναι το πολύ 1 και άρα $n \in \{-1, 0, 1, 2, 3\}$. Εύκολα βλέπουμε ότι τα $0, 2$ απορρίπτονται και ότι τα $-1, 1, 3$ ικανοποιούν την αρχική συνθήκη.

Επιμελητής: Γιώργος Μπαλόγλου

ΑΣΚΗΣΗ 59 *(Προτείνει ο erxmer) Σε δεδομένο τρίγωνο ABC φέρνουμε τον περιγεγραμμένο κύκλο (C_1, R) και τον εγγεγραμμενο (C_2, r). Αν ονομάσουμε d την απόσταση μεταξύ των κέντρων των κύκλων αυτών, είναι γνωστό (Euler) ότι $R^2 - 2Rr = d^2$.*
Ισχύει το αντίστροφο;

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=62&t=27484

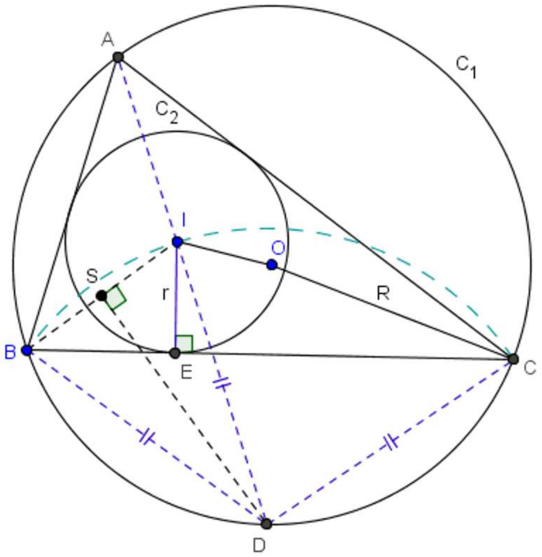
Λύση (Σωτήρης Λουρίδας) Από την σχέση $OI^2 = R^2 - 2Rr$, που έχουμε σαν δεδομένο του προβλήματος του αντιστρόφου παίρνουμε:

1) $R > OI$, 2) $R > 2r$.

Άρα ο κύκλος C_2 είναι εντός του κύκλου C_1.

Για τυχόν σημείο B του κύκλου C_1 η μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος BI τέμνει τον κύκλο C_1 στο σημείο D.
Ο κύκλος $(D, DB = DI)$ τέμνει τον κύκλο C_1 στο σημείο C.

Αν $A \equiv C_1 \cap DI$, είναι φανερό ότι ένα τέτοιο τρίγωνο είναι το ABC.

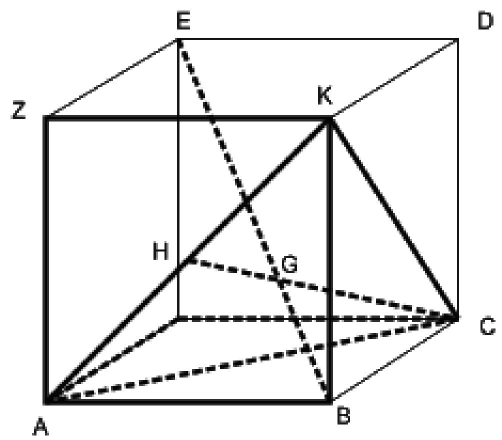


Πράγματι το σημείο I είναι το έκκεντρο του τριγώνου ABC σύμφωνα με τον τρόπο που κατασκευάστηκε αυτό και βέβαια υπάρχει πάντοτε (έχουμε $DB = DI = DC$, που είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη), αφού το ευθύγραμμο τμήμα BI βρίσκεται εντός του κύκλου με τα άκρα του να μήν είναι σημεία της περιφέρειας του κύκλου,
άρα η μεσοκάθετος του να τέμνει πάντα την περιφέρεια του κύκλου σε δύο μάλιστα σημεία (εδώ δουλέψαμε στο ένα σημείο δηλαδή το σημείο D).
Αν τώρα ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ABC που έχει κέντρο το σημείο I, έχει ακτίνα r_1 τότε η ευθεία σχέση του *Euler* δίνει:
$OI^2 = R^2 - 2Rr_1 \Rightarrow R^2 - 2Rr = R^2 - 2Rr_1 \Rightarrow r = r_1$.

ΑΣΚΗΣΗ 60 *(Προτείνει ο Δημήτρης Ιωάννου) Αν η ακμή ενός κύβου είναι a, να υπολογίσετε την ελάχιστη απόσταση μιας διαγωνίου του κύβου και της διαγωνίου μιας έδρας του κύβου που είναι ασύμβατη με την διαγώνιο του κύβου.*

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=62&t=30805

Λύση 1 (Ορέστης Γκότσης) Έστω EB, AK οι ασύμβατες.
Η EB είναι κάθετη στο επίπεδο που ανήκει το ισόπλευρο τρίγωνο AKC (με μήκη πλευρών $\alpha\sqrt{2}$) και διέρχεται από το κέντρο βάρους του τριγώνου AKC.
Είναι $GH = \dfrac{1}{3}CH = \dfrac{1}{3}\dfrac{\left(\alpha\sqrt{2}\right)\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\alpha\sqrt{6}}{6}$.



.

Λύση 2 (Κώστας Δόρτσιος) Η κάθετη από το σημείο O προς την AH είναι και κάθετη στην BD διότι

το επίπεδο που ορίζουν οι AH και AC είναι μεσοκάθετο επίπεδο στην BD.

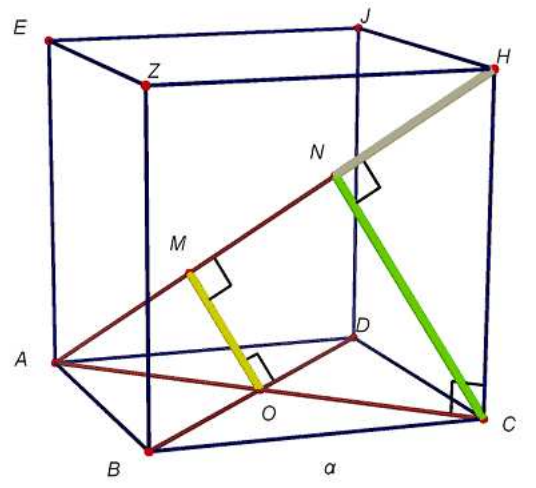
Άρα η OM κοινή κάθετη των BD, AH.

Ακόμα αν φέρουμε την CN κάθετη στην AH τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ACH υπολογίζεται ότι

$HN = \dfrac{AH}{3}$

Άρα τελικά είναι: $AM = MN = NH$ κι από τη σχέση αυτή βρίσκεται και η τιμή της OM

αφού πρώτα βρεθεί η τιμή της CN.



Επιμελητής: Νίκος Μαυρογιάννης

ΑΣΚΗΣΗ 61 *(Προτείνει ο Μπάμπης Στεργίου) Αν ο z διατρέχει το σύνολο των μιγαδικών, να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της παράστασης*

$$A = |z^2 + z + 1| + |z^2 - z + 1|$$

---

http://www.mathematica.gr/forum/posting.php?mode=edit&f=60&p=101658

Λύση (Θάνος Μάγκος) Αν θέσουμε $z = x + yi$, με $x, y \in \mathbb{R}$, βρίσκουμε

$$A = \sqrt{(x^2 - y^2 + x + 1)^2 + (2xy + y)^2} + \sqrt{(x^2 - y^2 - x + 1)^2 + (2xy - y)^2}.$$

Από την ανισότητα Minkowski προκύπτει

$$A \geq \sqrt{4(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4y^2} = 2\sqrt{(x^2 - y^2 + 1)^2 + y^2}.$$

Θα αποδείξουμε ότι η ελάχιστη τιμή της παράστασης $(x^2 - y^2 + 1)^2 + y^2$ ισούται με $\frac{3}{4}$, οπότε θα προκύψει ότι

$$A_{\min} = \sqrt{3}.$$

Πράγματι, αν $y^2 > 1$, είναι φανερά

$$(x^2 - y^2 + 1)^2 + y^2 > 1 > \frac{3}{4}.$$

Ας είναι τώρα

$$y^2 \leq 1 \Rightarrow 1 - y^2 \geq 0.$$

Τότε, έχουμε

$$(x^2 - y^2 + 1)^2 + y^2 \geq (1 - y^2)^2 + y^2 = y^4 - y^2 + 1 = (y^2 - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{3}{4}.$$

Άρα

$$\min((x^2 - y^2 + 1)^2 + y^2) = \frac{3}{4}$$

για $x = 0$ και $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

ΑΣΚΗΣΗ 62 *(Προτείνει ο Χρήστος Κυριαζής) Έστω τα διανύσματα:*

$$\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2},\ .....,\overrightarrow{a_n}$$

μέτρου το πολύ ένα. Αν

$$\overrightarrow{c} = \pm\overrightarrow{a_1} \pm \overrightarrow{a_2} \pm ..... \pm \overrightarrow{a_n}$$

να δείξετε πως με κατάλληλη επιλογή των προσήμων μπορεί να ισχύει:

$$\left|\overrightarrow{c}\right| \leq \sqrt{2}$$

---

http://www.mathematica.gr/forum/posting.php?mode=edit&f=60&p=135540

Λύση (Βαγγέλης Μουρούκος) Το ζητούμενο ισχύει προφανώς για $n = 1$. Για $n = 2$ από την ταυτότητα του παραλλληλογράμμου έχουμε ότι:

$$\left|\vec{a}_1 + \vec{a}_2\right|^2 + \left|\vec{a}_1 - \vec{a}_2\right|^2 = 2\left|\vec{a}_1\right|^2 + 2\left|\vec{a}_2\right|^2 \leq 4,$$

οπότε

$$\left|\vec{a}_1 + \vec{a}_2\right| \leq \sqrt{2}$$

ή

$$\left|\vec{a}_1 - \vec{a}_2\right| \leq \sqrt{2}.$$

Έστω ότι $n \geq 3$. Θα αποδείξουμε το ζητούμενο με επαγωγή στο n. Υποθέτουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για το φυσικό αριθμό $n - 1$. Θεωρούμε τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$, καθένα από τα οποία έχει μέτρο το πολύ ίσο με 1.

Ανάμεσα στα έξι διανύσματα

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, -\vec{a}_1, -\vec{a}_2, -\vec{a}_3$$

υπάρχουν δύο, έστω τα $\vec{a}_1, \vec{a}_2$, που σχηματίζουν γωνία το πολύ ίση με 60°. Τότε, θα είναι $\left|\vec{a}_1 - \vec{a}_2\right| \leq 1$, οπότε εφαρμόζοντας την επαγωγική υπόθεση στα διανύσματα $\vec{a}_1 - \vec{a}_2, \vec{a}_3, \ldots, \vec{a}_n$ θα υπάρχουν $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ τέτοιοι, ώστε

$$\left|\varepsilon_1 (\vec{a}_1 - \vec{a}_2) + \varepsilon_2\vec{a}_3 + \cdots + \varepsilon_{n-1}\vec{a}_n\right| = \left|\varepsilon_1\vec{a}_1 - \varepsilon_1\vec{a}_2 + \varepsilon_2\vec{a}_3 + \cdots + \varepsilon_{n-1}\vec{a}_n\right| \leq \sqrt{2}$$

και το συμπέρασμα έπεται από την αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής.