

# Γνωριμία με τους διαγωνισμούς της ΕΜΕ

## Προετοιμασία για το ΘΑΛΗ –

### Γ. Γεωμετρία - Συνδυαστική

Μπάμπης Στεργίου – Σεπτέμβριος 2012

Οι παρακάτω ασκήσεις έχουν τεθεί στους διαγωνισμούς της ΕΜΕ κατά τα προηγούμενα έτη. Προέρχονται κυρίως από διαγωνισμούς της Α' και Β' Λυκείου και μερικώς από τους διαγωνισμούς του Γυμνασίου που άπτονται όμως του επιπέδου της Α' Λυκείου.

Για τη λύση των ασκήσεων αυτών θεωρούνται γνωστές οι ιδιότητες της βασικής αριθμητικής, της διαιρετότητας και των πρώτων αριθμών.

## 1. Θεωρία αριθμών

### Θέμα 1°

Έστω φυσικός αριθμός  $\alpha > 3$ . Αν οι αριθμοί  $\alpha, \alpha + 2$  είναι πρώτοι, να αποδείξετε ότι ο αριθμός  $\alpha + 4$  είναι σύνθετος.

Α' Λυκείου - Ευκλείδης 2006

### Θέμα 2°

Να βρείτε τους θετικούς ακέραιους αριθμούς  $x, y$  που ικανοποιούν την εξίσωση :

$$x^5 y^2 + 100x^3 = 200$$

Α' Λυκείου - Ευκλείδης 1999

### Θέμα 3°

Δίνεται ο αριθμός  $K = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2008}$ . Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 30 διαιρεί τον  $K$ .

Β' Λυκείου - Θαλής 2006

### Θέμα 4°

Να αποδείξετε ότι ο αριθμός  $K = \underbrace{111\dots1}_{v\text{-ψηφία}} \underbrace{2111\dots1}_{v\text{-ψηφία}}$  είναι σύνθετος.

Β' Λυκείου - Ευκλείδης 1997

### Θέμα 5°

Οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί. Αν αυξήσουμε τη μία πλευρά κατά 1 και την άλλη κατά 2, τότε το ορθογώνιο που προκύπτει έχει διπλάσιο εμβαδό από το αρχικό. Να βρείτε τις διαστάσεις του αρχικού ορθογωνίου.

Α' Λυκείου - Θαλής 2000

### Θέμα 6°

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $x^2 - (2006k + 1)x + 2007 = 0$ , με  $k \in \mathbb{Z}$ , δεν έχει ακέραιες ρίζες.

Β' Λυκείου - Θαλής 2006

**Θέμα 7°**

Να βρείτε όλους τους διψήφιους αριθμούς  $\overline{αβ}$  που είναι ίσοι με το γινόμενο των ψηφίων τους, αφού πρώτα αυξηθούν κατά 2.

B' Λυκείου - Θαλής 2002

**Θέμα 8°**

Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς  $n$ , έτσι ώστε ο αριθμός  $2n+1$  να διαιρεί τον αριθμό  $n^2 + n - 2$ .

A' Λυκείου - Θαλής 1998

**Θέμα 9°**

Για τους ακέραιους αριθμούς  $α, β$  ισχύει ότι :

$$(α - β)^2 = \frac{4αβ}{α + β - 1}$$

α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός  $α + β$  είναι τέλειο τετράγωνο.

β) Να βρείτε όλα τα ακέραια ζεύγη  $(α, β)$  με την παραπάνω ιδιότητα.

B' Λυκείου - Ευκλείδης 2002

**2. Συνδυαστική - Προβλήματα****Θέμα 10°**

Οι 20 μαθητές ενός τμήματος πρέπει να δηλώσουν ένα τουλάχιστον μάθημα επιλογής. Υπάρχουν τέσσερα μαθήματα : τα Α, Β, Γ, Δ. Το μάθημα Α δήλωσαν 15 μαθητές, το Β 13, το Γ 14 και το Δ 19 μαθητές. Να αποδείξετε ότι ένας τουλάχιστον μαθητής δήλωσε και τα τέσσερα μαθήματα.

B' Λυκείου - Θαλής 2002

**Θέμα 11°**

Η Α' τάξη ενός Λυκείου έχει 5 τμήματα που το καθένα έχει τουλάχιστον 20 μαθητές. Σε καθέναν από τους μαθητές δώσαμε 10 ευρώ. Αν συνολικά δόθηκαν 1090 ευρώ, να αποδείξετε ότι δύο τουλάχιστον από τα τμήματα αυτά έχουν τον ίδιο αριθμό μαθητών

A' Λυκείου - Θαλής 2006