

Μια συνάρτηση f έχει την ιδιότητα $f(f(x)-f(y)) = f(f(x)) - y$, για κάθε x, y στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :

- α) $f(0)=0$,
- β) η f είναι 1-1
- γ) η f είναι περιττή
- δ) η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.
- ε) ισχύει ότι $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για όλα τα x, y .

Η σειρά των ερωτημάτων δεν είναι δευσμεντική.

α) Για $x=y=0$ $f(0)=f(f(0))$

Για $x=f(x)$ $y=f(y)$ $f(f(x)-f(y))=f(f(f(x)))-f(y)$

Για $x=0$ $y=0$ $f(0)=f(f(f(0)))-f(0)$

$$2f(0)=f(f(f(0)))$$

$$2f(0)=f(0) \quad f(0)=f(f(0))$$

$$f(0)=0$$

β) Για $f(x)=f(y)$ $f(0)=f(f(x))-y$

$$0=f(f(y))-y \quad f(x)=f(y)$$

$$y=f(f(y))$$

Άρα και $x=f(f(x))$ $f(x)=f(y)$

$$x=f(f(y))$$

άρα $x=y$

γ) Για $x=0$ $f(-f(y))=-y$

για $y=-y$ $f(-f(-y))=y$ όμως $y=f(f(y))$

άρα $-f(-y)=f(y)$

δ) Στη σχέση $f(f(x))=x$ με x ανήκει στο $\mathbb{R}$

θέτουμε $f(x)=a$ οπότε $f(a)=x$ ανήκει στο $\mathbb{R}$. Άρα $\Sigma.T. = \mathbb{R}$

ε) Επειδή $x=f(f(x))$ και f περιττή έχουμε $f(f(x)+f(-y))=x-y$

Επειδή $x=f(f(x))$ και 1-1 άρα αντιστρέψιμη $f(x)=f^{-1}(x)$

Θέτουμε $f(x)=a$ και $f(-y)=\beta$ και $f(a)=f^{-1}(a)$

$$f(\beta)=f^{-1}(\beta)$$

Άρα $f(f(x)+f(-y))=x-y$

$$f(a+\beta)=f^{-1}(a)+f^{-1}(\beta)$$

$$f(a+\beta)=f(a)+f(\beta)$$

>

>Μια συνάρτηση f έχει την ιδιότητα $f(f(x)-f(y)) = f(f(x)) - y$, για κάθε x,y στο $\mathbb{R}$.

>Να αποδείξετε ότι αν επιπλέον η f είναι γνησίως μονότονη τότε είναι κάποια από τις

> $f_1(x)=x$, $f_2(x)=-x$

A) Ξέρουμε ότι $f(f(x))=x$. Έστω f γνησίως αύξουσα. Θα δείξουμε ότι $f(x)=x$.

Έστω ότι $f(x) \neq x$

α) Για $f(x) < x$ έχουμε $f(f(x)) < f(x)$ άρα $x < f(x)$ αδύνατο.

β) Για $f(x) > x$ έχουμε $f(f(x)) > f(x)$ άρα $x > f(x)$ αδύνατο.

Άρα $f(x)=x$.

B) Ξέρουμε ότι $f(f(x))=x$ και περιττή. Έστω f γνησίως φθίνουσα. Θα δείξουμε ότι

$f(x)=-x$.

Έστω ότι $f(x) \neq -x$

α) Για $f(x) < -x$ έχουμε $f(f(x)) > f(-x)$ άρα $x > -f(x)$ και $-x < f(x)$ αδύνατο.

β) Για $f(x) > -x$ έχουμε $f(f(x)) < f(-x)$ άρα $x < -f(x)$ και $-x > f(x)$ αδύνατο

Άρα $f(x)=-x$