

Γρηγόριος Κωστάκος
grigkost@gmail.com

Ιωάννινα, 6 Σεπτεμβρίου 2008

ΑΣΚΗΣΗ: Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει
$$f(x+1)f(x) + f(x+1) + 1 = 0.$$

Νά αποδειχθεί ότι:

- (a) ότι η εξίσωση $f(x) = -1$ είναι αδύνατη και
- (b) η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής.

ΛΥΣΗ: Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει: $f(x+1)f(x) + f(x+1) + 1 = 0$ (1).

(a) $f(x+1) \cdot (f(x) + 1) = -1 \Rightarrow f(x+1) \cdot (f(x) + 1) < 0 \Rightarrow f(x) + 1 \neq 0.$

(b) $f(x+1) \cdot (f(x) + 1) = -1 \Leftrightarrow f(x+1) = -\frac{1}{f(x) + 1}$ (2).

Για την συνάρτηση $g(x) = f(x) + 1$, $x \in \mathbb{R}$, από την (1) προκύπτει

$g(x+1)g(x) = g(x) - 1 = f(x)$. Έστω ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $f(x) > 0$.

Τότε $\frac{1}{f(x) + 1} > 0 \stackrel{(2)}{\Rightarrow} f(x+1) = -\frac{1}{f(x) + 1} < 0$. Άτοπο.

Επομένως υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $g(\alpha+1)g(\alpha) = f(\alpha) < 0$ (3).

Έστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής. Τότε και η συνάρτηση g είναι συνεχής και λόγω της (3), από το Θεώρημα *Bolzano*, προκύπτει ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \alpha + 1)$, τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = -1$. Άτοπο.

Άρα η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής. \square