$$\lim_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa}=\frac{\alpha_\nu}{\beta_\kappa}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\nu}{x^\kappa}\quad ■$$

Παρατήρηση: Η πρόταση ισχύει και όταν $x\to-\infty$.

Μια σημαντική εφαρμογή του θεωρήματος Bolzano και της προηγούμενης πρότασης είναι η παρακάτω χαρακτηριστική ιδιότητα των πολυωνύμων περιττού βαθμού.

> Κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

Απόδειξη

Έστω το πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$, $\alpha_\nu\neq0$ και ν περιττός.

— Αν $\alpha_\nu>0$, σύμφωνα με τα παραπάνω είναι

$$\lim_{x\to-\infty}P(x)=\alpha_\nu\cdot\lim_{x\to-\infty}x^\nu=-\infty \text{ και } \lim_{x\to+\infty}P(x)=\alpha_\nu\cdot\lim_{x\to+\infty}x^\nu=+\infty$$

Επομένως, υπάρχουν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $P(\alpha)<0$ και $P(\beta)>0$, δηλαδή για την πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ ισχύουν οι προυποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Υπάρχει λοιπόν οπωσδήποτε μια πραγματική ρίζα του πολυωνύμου.

— Αν $\alpha_\nu<0$, η απόδειξη είναι ανάλογη. ■

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. • $\lim_{x\to+\infty}(-2x^3+x^2-1)=-2\cdot\lim_{x\to+\infty}(x^3)=-2\cdot(+\infty)=-\infty$

• $\lim_{x\to-\infty}(5x^6-x^4+2x^2-x+1)=5\cdot\lim_{x\to-\infty}x^6=5\cdot(+\infty)=+\infty$

• $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^2-x+1}{3x^2-2}=-\dfrac{2}{3}\cdot\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=-\dfrac{2}{3}$

• $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{-3x^5+2x-1}{x^2+1}=-3\cdot\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^5}{x^2}=-3\lim_{x\to-\infty}x^3=-3\cdot(-\infty)=+\infty$

• $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-x+2}{x^3-x+1}=2\cdot\lim_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=2\cdot0=0$

2. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{4x^2+x-3}$

Λύση

Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού $A=(-\infty,-1]\cup[\frac{3}{4},+\infty)$.