Έστω, λοιπόν, y_o τυχαίος πραγματικός αριθμός. Θεωρούμε $x = x_o$ και $y=\dfrac{y_o}{4f(x_o)}$ $(f(x_o) \neq 0)$

οπότε για $x_2 = f(x_o) + \dfrac{y_o}{4f(x_o)}$ και $x_1 = f(x_o) - \dfrac{y_o}{4f(x_o)}$ η (1) γίνεται $f(x_2) - f(x_1) =$

$=f(f(x_o) + \dfrac{y_o}{4f(x_o)}) - f(f(x_o) - \dfrac{y_o}{4f(x_o)}) = 4f(x_o)\cdot \dfrac{y_o}{4f(x_o)} = y_o$

Άρα η διαφορά $f(x_1) - f(x_2)$ διατρέχει όλο το R.

Έτσι από την σχέση (3) παίρνουμε τον τύπο $f(x) = x^2 + c$ με $c = f(0)$

Πρόβλημα 3ο (Θεώρημα του ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ, 1873 – 1950)

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και εσωτερικό του σημείο Κ. Να αποδειχθεί ότι:

$$(\mathrm{K B \Gamma})\cdot \overrightarrow{\mathrm{KA}} + (\mathrm{K A \Gamma})\cdot \overrightarrow{\mathrm{KB}} + (\mathrm{KAB})\cdot \overrightarrow{\mathrm{K\Gamma}} = \vec{0}$$

Σκέψη ή Ανάλυση

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα $(\mathrm{K B \Gamma})\cdot \overrightarrow{\mathrm{KA}} + (\mathrm{K A \Gamma})\cdot \overrightarrow{\mathrm{KB}} + (\mathrm{KAB})\cdot \overrightarrow{\mathrm{K\Gamma}}$ αποτελείται από γινόμενα ίδιου τύπου δηλαδή εμβαδόν τριγώνου επί αντίστοιχη διανυσματική ακτίνα που δεν ανήκει στις ευθείες που ορίζονται από τις πλευρές του τριγώνου αυτού, ενώ ορίζει την κοινή πλευρά των δύο άλλων τριγώνων. Το φαινόμενο αυτό γίνεται κυκλικά. Άρα οδηγούμαστε στην σκέψη: το άθροισμα αυτό να ανήκει σε δύο διαφορετικές ευθείες – διευθύνσεις που σημαίνει ότι πρόκειται για το μηδενικό διάνυσμα.

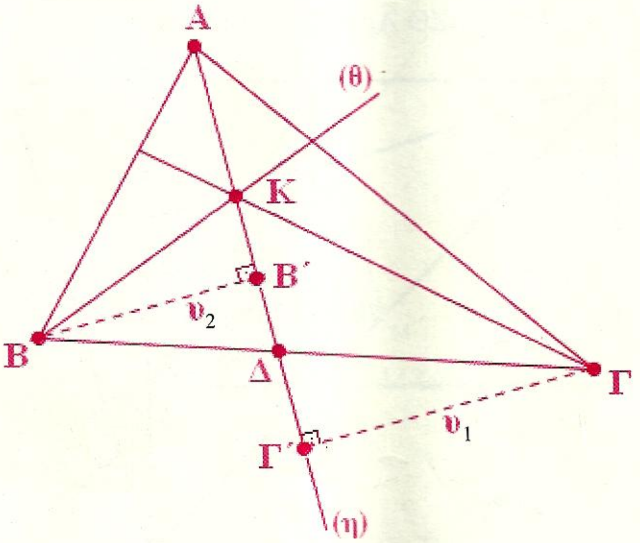
Λύση

Θεωρούμε $\upsilon_1 = \Gamma\Gamma'$ με $\Gamma\Gamma' \perp \mathrm{AK}$ και $\upsilon_2 = \mathrm{BB'}$ με $\mathrm{BB'} \perp \mathrm{A\Gamma}$. Έτσι έχουμε

$\dfrac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \dfrac{(\mathrm{KA\Gamma})}{(\mathrm{KAB})} = \dfrac{\Gamma\Delta}{\Delta\mathrm{B}}$. Από την ιδιότητα του μερικού λόγου παίρνουμε :

$\overrightarrow{\mathrm{K\Delta}} = \dfrac{(\mathrm{KA\Gamma})\cdot \overrightarrow{\mathrm{KB}} + (\mathrm{KAB})\cdot \overrightarrow{\mathrm{K\Gamma}}}{(\mathrm{KA\Gamma}) + (\mathrm{KAB})}$ ή $(\mathrm{KA\Gamma})\cdot \overrightarrow{\mathrm{KB}} + (\mathrm{KAB})\cdot \overrightarrow{\mathrm{K\Gamma}} = [(\mathrm{KA\Gamma})+(\mathrm{KAB})]\cdot \overrightarrow{\mathrm{K\Delta}} \in A_n$

με $\overrightarrow{\mathrm{KA}} \in A_n \Rightarrow (\mathrm{KB\Gamma})\cdot \overrightarrow{\mathrm{KA}} \in A_n$. Τελικά $(\mathrm{KB\Gamma})\cdot \overrightarrow{\mathrm{KA}} + (\mathrm{KA\Gamma})\cdot \overrightarrow{\mathrm{KB}} + (\mathrm{KAB})\cdot \overrightarrow{\mathrm{K\Gamma}} \in A_n$



Όμοια αποδεικνύεται ότι $(\mathrm{KB\Gamma})\cdot \overrightarrow{\mathrm{KA}} + (\mathrm{KA\Gamma})\cdot \overrightarrow{\mathrm{KB}} + (\mathrm{KAB})\cdot \overrightarrow{\mathrm{K\Gamma}} \in A_\theta$ Αφού λοιπόν το άθροισμα αυτό ανήκει σε δύο διαφορετικές διευθύνσεις θα είναι το μηδενικό διάνυσμα.