Εξωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων

Γιώργος Μπαλόγλου

4η Μαθηματική Εβδομάδα, Θεσσαλονίκη, 7-11 Μαρτίου 2012

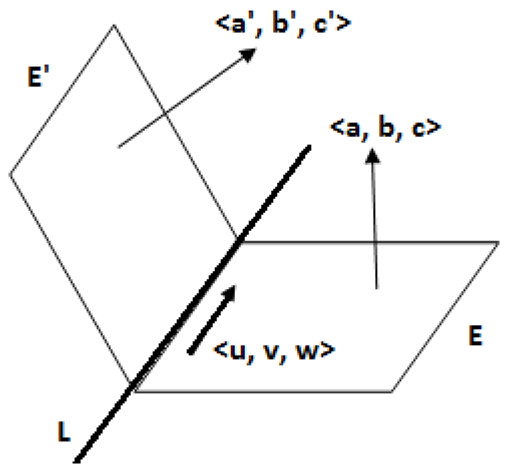
Μνήμη Λουκά Κανάκη (1956-2012)

υποθετικό κίνητρο: τομή δύο επιπέδων

Ας θυμηθούμε ότι ένα επίπεδο E στον τρισδιάστατο χώρο μπορεί να ορισθεί ως σύνολο των σημείων-διανυσμάτων (x, y, z) τέτοιων ώστε να είναι ορθογώνια τα διανύσματα $< x-p, y-q, z-r >$ και $< a, b, c >$, όπου (p, q, r) δοθέν σημείο του E και $< a, b, c >$ δοθέν διάνυσμα κάθετο στο E : τα δύο διανύσματα έχουν μηδενικό εσωτερικό γινόμενο, άρα $ax + by + cz = d$ (εξίσωση του E), όπου $d = ap + bq + cr$.

Ας θυμηθούμε επίσης ότι μία ευθεία L στον τρισδιάστατο χώρο μπορεί να ορισθεί ως σύνολο των σημείων-διανυσμάτων (x, y, z) τέτοιων ώστε να είναι παράλληλα τα διανύσματα $< x-p, y-q, z-r >$ και $< a, b, c >$, όπου (p, q, r) δοθέν σημείο της L και $< a, b, c >$ δοθέν διάνυσμα παράλληλο προς την L : η παραλληλία αυτή συνεπάγεται ότι η εξίσωση της L είναι η $\dfrac{x-p}{a} = \dfrac{y-q}{b} = \dfrac{z-r}{c}$.

Για να βρούμε επομένως την τομή L δύο επιπέδων E , E' με αντίστοιχες εξισώσεις $ax + by + cz = d$ και $a'x + b'y + c'z = d'$ αρκεί να βρούμε ένα κοινό τους σημείο (επιλύοντας εύκολα ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με τρεις αγνώστους) και ένα διάνυσμα $< u, v, w >$ παράλληλο προς την L . Παρατηρούμε εδώ ότι το $< u, v, w >$ οφείλει να είναι ταυτόχρονα ορθογώνιο προς το κάθετο διάνυσμα $< a, b, c >$ του E και ορθογώνιο προς το κάθετο διάνυσμα $< a', b', c' >$ του E' .



Προκύπτει επομένως από τον μηδενισμό των αντίστοιχων εσωτερικών γινομένων το ομογενές σύστημα

$au + bv + cw = 0$

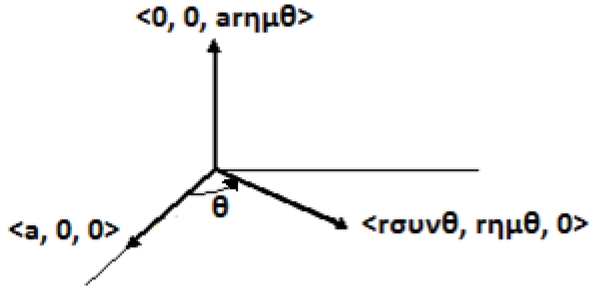
$a'u + b'v + c'w = 0$,

με λύσεις της μορφής $< u, v, w > \; = \; \lambda < \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} > \; = \; \lambda \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$,

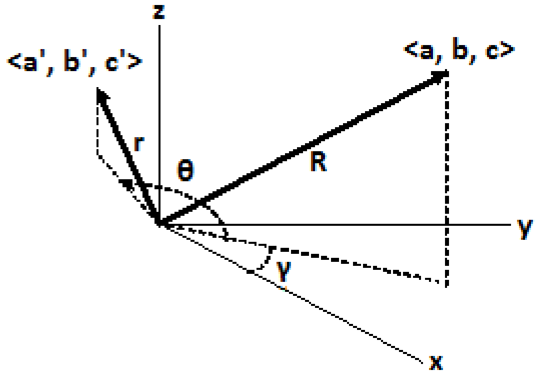
όπου $\vec{i} = <1,\ 0,\ 0>$, $\vec{j} = <0,\ 1,\ 0>$, $\vec{k} = <0,\ 0,\ 1>$ τα θετικά μοναδιαία διανύσματα των αξόνων x, y, z. (Ας παρατηρηθεί εδώ ότι το διάνυσμα-ορίζουσα που προέκυψε είναι μη μηδενικό, εκτός και αν τα E, E' είναι παράλληλα.)

το νέο διάνυσμα: φορά

Στην ειδική περίπτωση $< a, 0, 0 >$, $< r\sigma\upsilon\nu\theta, r\eta\mu\theta, 0 >$, όπου $a > 0$, $r > 0$, $0 \le \theta \le \pi$, παρατηρούμε ότι το ‘γινόμενο’ $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 0 & 0 \\ r\sigma\upsilon\nu\theta & r\eta\mu\theta & 0 \end{vmatrix} = (ar\eta\mu\theta)\vec{k}$ όχι μόνο είναι κάθετο στους δύο ‘παράγοντες’ μα έχει και φορά προς τα άνω, σχηματίζοντας μαζί τους δεξιόστροφο σύστημα (αντίχειρας-δείκτης-μέσος).



Αποδεικνύεται ότι η δεξιοστροφία του συστήματος {$< a, b, c >$, $< a', b', c' >$, $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$} ισχύει πάντοτε. Πράγματι, αν $a = R\sigma\upsilon\nu\gamma$, $b = R\eta\mu\gamma$, $a' = r\sigma\upsilon\nu(\gamma + \theta)$, $b' = r\eta\mu(\gamma + \theta)$, όπου $R > 0$, $r > 0$, $0 \le \theta \le \pi$, αν ‘προηγείται’ δηλαδή η xy-προβολή του $< a, b, c >$ της xy-προβολής του $< a', b', c' >$, τότε το 'γινόμενο' έχει θετική/ανοδική z-συνιστώσα λόγω της $ab' - a'b = Rr[\sigma\upsilon\nu\gamma\eta\mu(\gamma+\theta) - \sigma\upsilon\nu(\gamma+\theta)\eta\mu\gamma] = Rr\eta\mu\theta \geq 0$.



το νέο διάνυσμα: μέτρο

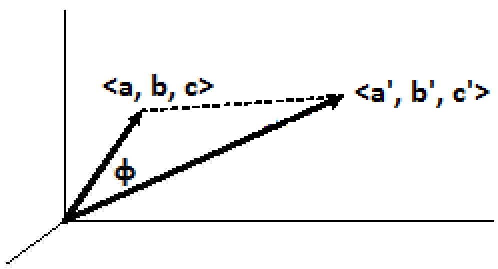
Αναφερόμενοι και πάλι στην ειδική περίπτωση $< a, 0, 0 >$, $< r\sigma\upsilon\nu\theta, r\eta\mu\theta, 0 >$, όπου $a > 0$, $r > 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, παρατηρούμε ότι το 'γινόμενο'

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 0 & 0 \\ r\sigma\upsilon\nu\theta & r\eta\mu\theta & 0 \end{vmatrix} = (ar\eta\mu\theta)\vec{k}$$ έχει μέτρο ίσο προς το εμβαδόν του

παραλληλογράμμου που ορίζουν οι δύο 'παράγοντες'.

Χρησιμοποιώντας τον τύπο εμβαδού του Ήρωνα -- για το τρίγωνο με κορυφές $(0,0,0)$, (a,b,c), (a',b',c') -- και την ταυτότητα (Lagrange)

$$(ab'-a'b)^2 + (bc'-b'c)^2 + (ac'-a'c)^2 = (a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2) - (aa'+bb'+cc')^2$$



συμπεραίνουμε ότι η ισότητα μέτρου και εμβαδού (και 'εμβαδικότητα' του 'γινομένου') ισχύει και στην γενική περίπτωση: το μέτρο του $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$ ισούται προς το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζουν τα δύο διανύσματα, δηλαδή προς $|<a,b,c>| \cdot |<a',b',c'>| \cdot \eta\mu\phi$, όπου ϕ η γωνία των $<a,b,c>$, $<a',b',c'>$.

το νέο διάνυσμα: όνομα

Για λόγους που δεν είναι ξεκάθαροι , το διάνυσμα-ορίζουσα που προέκυψε ονομάσθηκε (στα Ελληνικά) «εξωτερικό γινόμενο», συμβολικά $<a,b,c> \times <a',b',c'>$ = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$.

Στα Αγγλικά οι επικρατούντες όροι είναι "cross product" και "vector product", ενώ οι σχετιζόμενοι όροι "exterior algebra" και "exterior product" παραπέμπουν στο έργο του Hermann Grassman και δικαιολογούν ως έναν βαθμό το επίθετο «εξωτερικό». Μια σχετική συζήτηση (και ιστορικά σχόλια του Νίκου Μαυρογιάννη) είναι διαθέσιμη στο http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=62&t=2643 .

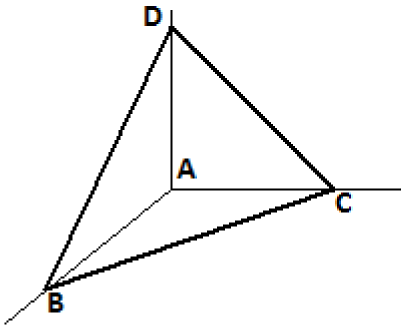
Επειδή σκοπός αυτού του άρθρου δεν είναι μία διεξοδική εισαγωγή στο εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων, ο αναγνώστης παραπέμπεται σε βιβλία όπως το «Μαθηματικά για Μαθηματικούς» (Χ. Στεργίου, Χ. Νάκης, Α. Μπεληγιάννης – Σαββάλας 2004), Ενότητα 18, για μια επισκόπηση των βασικών ιδιοτήτων του. Η συνέχεια του άρθρου αφιερώνεται σε επιλεγμένες εφαρμογές του εξωτερικού γινομένου διανυσμάτων σε στοιχειώδη γεωμετρικά προβλήματα του χώρου και του επιπέδου, με σκοπό να γίνει το εξωτερικό γινόμενο … λιγότερο εξωτικό!

Ας τονισθεί εδώ ότι μία από τις κύριες εφαρμογές του εξωτερικού γινομένου στην παραδοσιακή βιβλιογραφία είναι ακριβώς το πρόβλημα που χρησιμοποιήσαμε εδώ ως σημείο εκκίνησης για να φτάσουμε στο εξωτερικό γινόμενο, η εύρεση δηλαδή της τομής δύο επιπέδων: θεωρούμε ότι αυτός ο κοπιαστικός αρχικά τρόπος εισαγωγής στην καινούργια έννοια πλεονεκτεί από διδακτικής σκοπιάς έναντι του παραδοσιακού ορισμού, όπου το εξωτερικό γινόμενο εφοδιάζεται αυθαίρετα με τα χαρακτηριστικά που εδώ χρειάστηκε να αποδείξουμε (για να αποδειχθεί στην συνέχεια ότι μπορεί να εκφρασθεί και ως ορίζουσα). Αντί δηλαδή για ένα θεσπέσιο αλλά ουρανοκατέβατο διάνυσμα προτιμούμε ένα διάνυσμα που γεννιέται – ή έστω θα μπορούσε να έχει γεννηθεί – μέσα από ένα συγκεκριμένο πρόβλημα και διαπιστώνεται μετά πως έχει και κάποιες πολύ χρήσιμες ιδιότητες.

γενίκευση Πυθαγορείου Θεωρήματος

Σε κάθε ορθογώνιο τετράεδρο $ABCD$ ισχύει η $(BCD)^2 = (ABC)^2 + (ABD)^2 + (ACD)^2$.

Η ισότητα αυτή μπορεί βεβαίως να αποδειχθεί με χρήση του τύπου εμβαδού του Ήρωνα.



Μία κατά βάθος ισοδύναμη απόδειξη προκύπτει άμεσα από την εμβαδικότητα του εξωτερικού γινομένου:

$$(BCD)^2 = \frac{1}{4}|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}|^2 = \frac{1}{4}\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -b & c & 0 \\ -b & 0 & d \end{vmatrix}\right|^2 = \frac{(cd)^2 + (bd)^2 + (bc)^2}{4} =$$

$$= (ACD)^2 + (ABD)^2 + (ABC)^2,$$

όπου $A = (0,0,0)$, $B = (b,0,0)$, $C = (0,c,0)$, $D = (0,0,d)$.

[Βλέπε επίσης http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=112&t=26307 .]

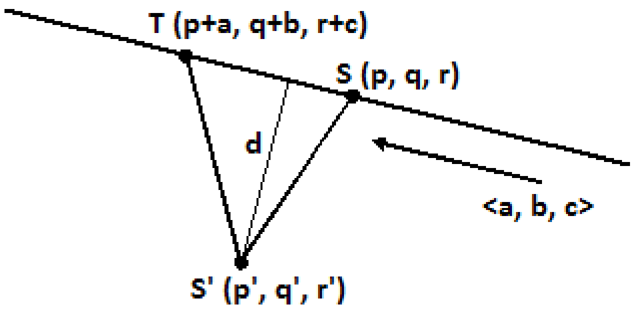
απόσταση σημείου από ευθεία

Αν (p', q', r') είναι σημείο S' εκτός ευθείας L με εξίσωση $\frac{x-p}{a} = \frac{y-q}{b} = \frac{z-r}{c}$, ποια είναι η απόσταση d από το S' στην L;

Γνωρίζοντας δύο σημεία της L, τα $S = (p,q,r)$ και $T = (p+a, q+b, r+c)$, εκφράζουμε το εμβαδόν του τριγώνου $S'ST$ κατά δύο τρόπους, $(S'ST) = \frac{1}{2}|ST|\cdot d$ και

$(S'ST)=\frac{1}{2}|\overrightarrow{S'S}\times\overrightarrow{S'T}|$, οπότε προκύπτει άμεσα ο τύπος

$$d=\frac{|\overrightarrow{S'S}\times\overrightarrow{S'T}|}{|ST|}=\frac{|<p-p',q-q',r-r'>\times<p+a-p',q+b-q',r+c-r'>|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

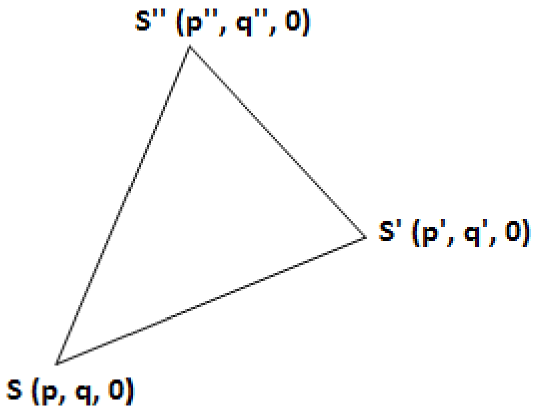


Επαλήθευση: ο παραπάνω τύπος δίνει $d=\frac{|bp'-aq'-bp+aq|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ στην δισδιάστατη περίπτωση $r=r'=c=0$ (απόσταση του (p',q') από την $b(x-p)=a(y-q)$).

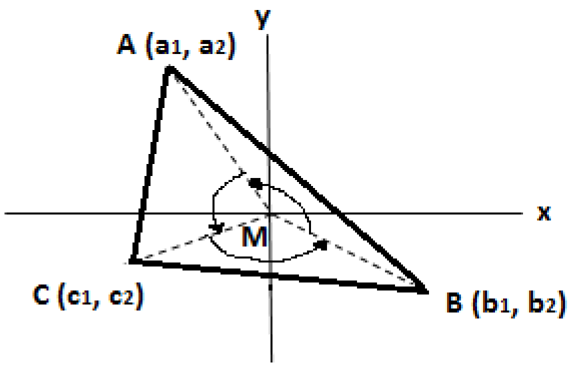
εμβαδόν-ορίζουσα και 'Σχέση Καραθεοδωρή'

Αυτό που έμεινε γνωστό στην Ελληνική βιβλιογραφία ως «Σχέση Καραθεοδωρή» -- βλέπε «Η ζωή και το έργο του Κ. Καραθεοδωρή» (Ευάγγελου Σπανδάγου, Αίθρα 2000), σελ. 134 -- προτάσσει ότι για κάθε σημείο M εντός του τριγώνου ABC ισχύει η σχέση εμβαδών - διανυσμάτων $(MAB)\overrightarrow{MC}+(MBC)\overrightarrow{MA}+(MCA)\overrightarrow{MB}=0$. Η μόνη απόδειξη που γνωρίζω πλην εκείνης του Σωτήρη Λουρίδα (Ευκλείδης Β', τ. 70, σελ. 63, 2008) στηρίζεται στην γνωστή έκφραση του εμβαδού τριγώνου ως απόλυτης τιμής ορίζουσας, κάτι που μπορεί να αποδειχθεί και με την χρήση εξωτερικού γινομένου.

Πράγματι, αν $S=(p,q,0)$, $S'=(p',q',0)$, $S''=(p'',q'',0)$ είναι τρία σημεία στο επίπεδο, ισχύει η $(SS'S'')=\frac{1}{2}|\overrightarrow{S''S}\times\overrightarrow{S'S}|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ p-p'' & q-q'' & 0\\ p-p' & q-q' & 0\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}p & q & 1\\ p' & q' & 1\\ p'' & q'' & 1\end{vmatrix}\right|$.



Επιστρέφοντας στην Σχέση Καραθεοδωρή, επιλέγουμε το εντός του τριγώνου ABC σημείο M ως αρχή των αξόνων, έτσι ώστε $M=(0,0)$, $A=(a_1,a_2)$, $B=(b_1,b_2)$, $C=(c_1,c_2)$, και παρατηρούμε αρχικά, βγάζοντας τις απόλυτες τιμές, ότι $(MAB)=-\frac{1}{2}(a_1b_2-a_2b_1)$, $(MBC)=-\frac{1}{2}(b_1c_2-b_2c_1)$, $(MCA)=-\frac{1}{2}(c_1a_2-c_2a_1)$: οι ορίζουσες είναι αρνητικές για τον ίδιο λόγο που το εξωτερικό γινόμενο αποδείχτηκε δεξιόστροφο – το B 'προηγείται' του A, το C 'προηγείται' του B, και το A 'προηγείται' του C (επειδή το M κείται εντός του ABC)!



Ολοκληρώνοντας την απόδειξη, παρατηρούμε ότι η x-συνιστώσα και η y-συνιστώσα του αθροίσματος $(MAB)\overrightarrow{MC}+(MBC)\overrightarrow{MA}+(MCA)\overrightarrow{MB}$ είναι αντίστοιχα ίσες με

$$-\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=0 \text{ και } -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=0.$$

[Πηγή: «Σκόρπιες Σταγόνες Γεωμετρίας» (Χρήστος Μπαλόγλου, 2001), σελ. 57-60.]

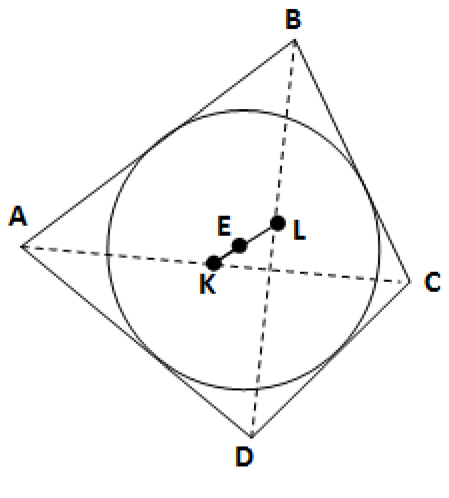
μέσα διαγωνίων τετραπλεύρου

Αν E είναι το κέντρο κύκλου εγγεγραμμένου σε περιγράψιμο τετράπλευρο $ABCD$ και K, L είναι τα μέσα των διαγωνίων AC και BD, τότε τα K, E, L είναι συνευθειακά.

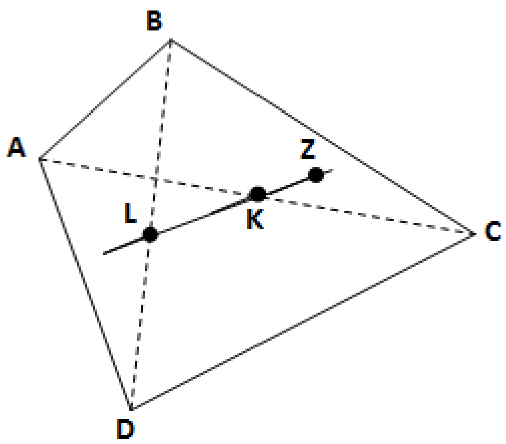
Απόδειξη. Από την περιγραψιμότητα και την $|AB|+|CD|=|BC|+|DA|$ προκύπτει άμεσα η ισότητα εμβαδών $(EAB)+(ECD)=(EBC)+(EDA)$. Λόγω δεξιοστροφίας και εμβαδικότητας του εξωτερικού γινομένου η ισότητα αυτή είναι ισοδύναμη προς την

$$\overrightarrow{EA}\times\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}\times\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EB}\times\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{ED}\times\overrightarrow{EA}\Leftrightarrow(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EC})\times(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{ED})=0.$$

Επειδή τα K, L είναι μέσα των AC, BD, η τελευταία ισότητα είναι ισοδύναμη προς την $\overrightarrow{EK}\times\overrightarrow{EL}=0$, η οποία βεβαίως ισχύει αν και μόνον αν τα K, E, L είναι συνευθειακά.



Ας παρατηρηθεί ότι με βάση το παραπάνω τέχνασμα – που έχουν χρησιμοποιήσει δύο τουλάχιστον σύγχρονοι Έλληνες γεωμέτρες, ο Νίκος Δεργιαδές και ο Πάρις Πάμφιλος – έχει ουσιαστικά αποδειχθεί το εξής γενικότερο θεώρημα του Pierre-Leon Anne: για κάθε σημείο Z εντός κυρτού τετραπλεύρου $ABCD$ ισχύει η ισότητα $(ZAB)+(ZCD)=(ZBC)+(ZDA)$ αν και μόνον αν το Z κείται επί της ευθείας που ορίζουν τα μέσα K, L των διαγωνίων AC, BD (γνωστής και ως «ευθείας του Νεύτωνα»). Το θεώρημα ισχύει, με 'προσημασμένα εμβαδά', και όταν το Z κείται εκτός του $ABCD$.



Η αρχική πρόταση μπορεί βεβαίως να αποδειχθεί και με παραδοσιακά γεωμετρικά μέσα, βλέπε για παράδειγμα την παρέμβαση του Κώστα Βήττα στο http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=62&t=31445 .

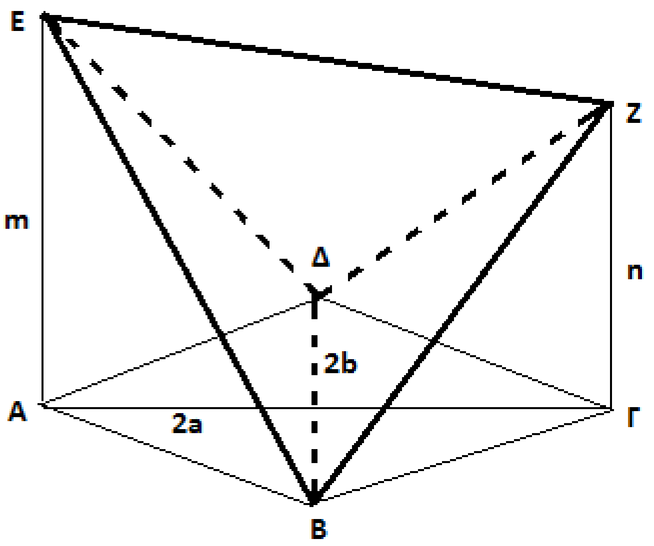
όγκος τετραέδρου

Την Κυριακή 19-2-12 10:37 μμ ο Χρήστος Κυριαζής (Γυμνάσιο & Λύκειο Χάλκης) πρότεινε στο http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=27&t=23457 το εξής πρόβλημα (άσκηση 262 στην κλασσική «Στερεομετρία» των Γ. Τσίντσιφα, Σ. Μπαλλή, Ι. Ζουρνά):

Έστω ρόμβος $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ με διαγωνίους $\mathrm{A\Gamma}=2a$, $\mathrm{B\Delta}=2b$, $a,b>0$. Από τα σημεία A, Γ υψώνω καθέτους στο επίπεδο του ρόμβου και λαμβάνω πάνω σε αυτές $\mathrm{AE}=m$, $\Gamma\mathrm{Z}=n$, $m,n>0$. Να βρείτε τον όγκο της πυραμίδας $\mathrm{B\Delta EZ}$ (προφανώς σε σχέση με τα a,b,m,n).

Ένας στοιχειώδης τρόπος επίλυσης αυτού του προβλήματος, που απαιτεί όμως αρκετή εξοικείωση με τον τρισδιάστατο χώρο, είναι η έκφραση του όγκου της πυραμίδας $\mathrm{B\Delta EZ}$ συναρτήσει των όγκων 'ορθών' πυραμίδων που υπολογίζονται εύκολα. Για παράδειγμα,

$$(\mathrm{BAEZ\Gamma})+(\mathrm{\Delta AE\Gamma Z})-(\mathrm{EA\Delta B})-(\mathrm{Z\Gamma\Delta B})=2(\mathrm{BAE\Gamma Z})-(\mathrm{EA\Delta B})-(\mathrm{Z\Gamma\Delta B})=$$
$$=2\{\frac{1}{3}[(\frac{m+n}{2})(2a)]b\}-\frac{1}{3}[\frac{1}{2}(2b)a]m-\frac{1}{3}[\frac{1}{2}(2b)a]n=\frac{(m+n)ab}{3}.$$



[Σχήμα Κώστα Δόρτσιου]

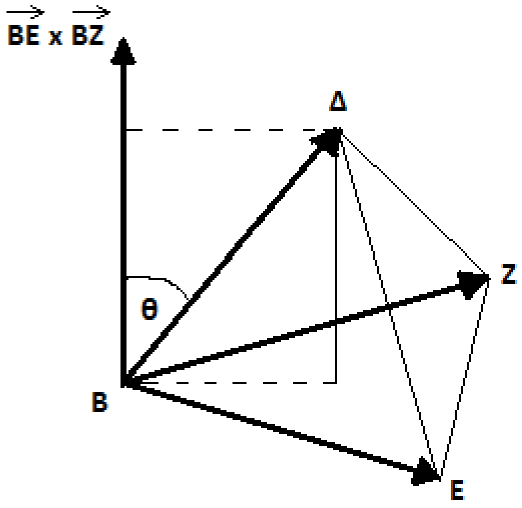
Στο ίδιο αποτέλεσμα φτάνουμε χρησιμοποιώντας εξωτερικό (αλλά και εσωτερικό) γινόμενο:

$$(\mathrm{B\Delta EZ}) = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{\mathrm{B\Delta}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BE}}\times\overrightarrow{\mathrm{BZ}})\right| = \frac{1}{6}\left|<0,2b,0>\cdot(<-a,b,m>\times<a,b,n>)\right| =$$

$$= \frac{1}{6}\left|<0,2b,0>\cdot<(n-m)b,(n+m)a,-2ab>\right| = \frac{(m+n)ab}{3}.$$

(Βεβαίως $\mathrm{A}=(-a,0,0)$, $\mathrm{B}=(0,-b,0)$, $\Gamma=(a,0,0)$, $\Delta=(0,b,0)$, $\mathrm{E}=(-a,0,m)$, $\mathrm{Z}=(a,0,n)$, με αρχή συντεταγμένων το κέντρο του ρόμβου $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$.)

Ο γνωστός τύπος για τον όγκο τυχόντος τετραέδρου $\mathrm{B\Delta EZ}$ που χρησιμοποιήθηκε προκύπτει από την ισότητα $|\overrightarrow{\mathrm{BE}}\times\overrightarrow{\mathrm{BZ}}| = 2(\mathrm{BEZ})$ και επίσης από την ισότητα (και βασική ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου) $|\overrightarrow{\mathrm{B\Delta}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BE}}\times\overrightarrow{\mathrm{BZ}})| = |\overrightarrow{\mathrm{B\Delta}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{BE}}\times\overrightarrow{\mathrm{BZ}}|\cdot\sigma\upsilon\nu\theta$, όπου θ η γωνία ανάμεσα στο κάθετο στην βάση BEZ διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{BE}}\times\overrightarrow{\mathrm{BZ}}$ και στην $\mathrm{B\Delta}$: η ποσότητα $|\overrightarrow{\mathrm{B\Delta}}|\cdot\sigma\upsilon\nu\theta$ είναι ίση προς το μήκος του από το Δ ύψους του $\mathrm{B\Delta EZ}$.



απόσταση ασυμβάτων ευθειών

Από τον τύπο για τον όγκο τετραέδρου (με χρήση εξωτερικού και εσωτερικού γινομένου) μπορούμε πολύ εύκολα να φτάσουμε σε τύπο – έναν από αρκετούς -- για την ελάχιστη απόσταση ανάμεσα σε δύο ασύμβατες ευθείες … βασιζόμενοι σε έναν πιο ‘στοιχειώδη’ τύπο για τον όγκο τετραέδρου!

Πράγματι, αν $ABCD$ είναι τυχόν τετράεδρο και E, F σημεία στις AC, BD (ή στις προεκτάσεις τους), αντίστοιχα, τέτοια ώστε $|EF|=s$, όπου s η ζητούμενη απόσταση ανάμεσα στις AC, BD, τότε $(ABCD)=\frac{1}{6}|AC|\cdot|BD|\cdot|EF|\cdot\eta\mu\theta$, όπου θ η γωνία ανάμεσα στις AC, BD.

Η απόδειξη αυτού του τύπου βασίζεται στην τοποθέτηση των AC, BD σε δύο παράλληλα επίπεδα (κάθετα στην EF) και στην έκφραση του $(ABCD)$ συναρτήσει των όγκων ‘ορθών’ τετραέδρων μία από τις ακμές των οποίων είναι πάντοτε η EF (που γίνεται πλέον η μία κάθετη πλευρά ορθογωνίων τριγώνων που αποτελούν την βάση των τετραέδρων). Αν για παράδειγμα το A βρίσκεται ανάμεσα στα E, C και το F βρίσκεται ανάμεσα στα B, D, τότε

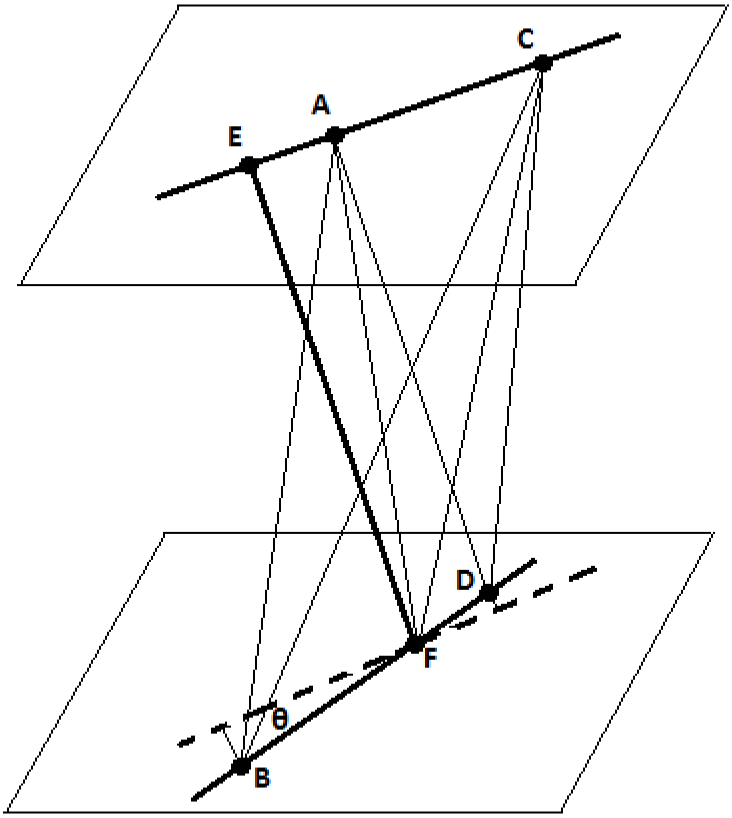
$$(ABCD)=(FECB)-(FEAB)+(FECD)-(FEAD)=$$

$$=\frac{1}{3}(FEC)\cdot|FB|\eta\mu\theta-\frac{1}{3}(FEA)\cdot|FB|\eta\mu\theta+\frac{1}{3}(FEC)\cdot|FD|\eta\mu\theta-\frac{1}{3}(FEA)\cdot|FD|\eta\mu\theta=$$

$$=\frac{1}{6}|EF|\cdot(|EC|\cdot|FB|-|EA|\cdot|FB|+|EC|\cdot|FD|-|EA|\cdot|FD|)\eta\mu\theta=$$

$$=\frac{1}{6}|AC|\cdot|BD|\cdot|EF|\eta\mu\theta.$$

(Οι υπόλοιπες περιπτώσεις αντιμετωπίζονται παρόμοια, με τα ύψη των τεσσάρων τετραέδρων να ισούνται πάντοτε προς $|FB|\eta\mu\theta$ και $|FD|\eta\mu\theta$.)



Με χρήση του εξωτερικού γινομένου ο παραπάνω τύπος γράφεται ως

$$(ABCD)=\frac{1}{6}|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BD}|\cdot s,$$

όπου $s=|EF|$ είναι η ελάχιστη απόσταση ανάμεσα στις AC, BD.

Ισχύει επίσης, όπως είδαμε, ο τύπος

$$(ABCD)=\frac{1}{6}|\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})|,$$

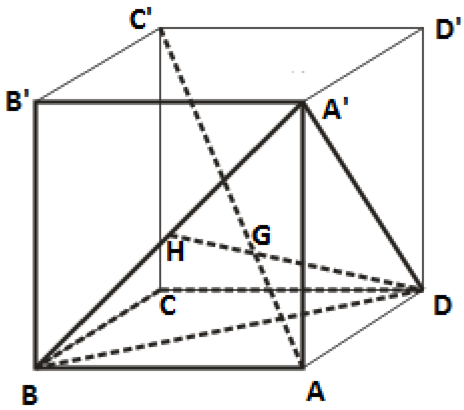
οπότε εξισώνοντας τα δεξιά σκέλη λαμβάνουμε $s=\dfrac{|\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})|}{|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BD}|}$ … ως την ελάχιστη απόσταση ανάμεσα σε δύο ασύμβατες ευθείες διερχόμενες από τα σημεία A, C και B, D, αντίστοιχα.

Εφαρμογή/επαλήθευση: η απόσταση ανάμεσα στην κύρια διαγώνιο AC' και στην πλευρική διαγώνιο $A'B$ κύβου $ABCDA'B'C'D'$ ακμής $2a$ -- με κέντρο $(0,0,0)$ και κορυφές $(\pm a,\pm a,\pm a)$ -- ισούται προς

$$\frac{|\overset{--->}{AC'}\cdot(\overset{--->}{AB}\times\overset{--->}{AA'})|}{|\overset{--->}{AC'}\times\overset{--->}{BA'}|}=\frac{|<-2a,2a,2a>\cdot(<-2a,0,0>\times<0,0,2a>)|}{|<2a,2a,2a>\times<-2a,0,2a>|}=$$

$$=\frac{|<-2a,2a,2a>\cdot<0,4a^2,0>|}{|<4a^2,8a^2,4a^2>|}=\frac{|8a^3|}{4\sqrt{6}a^2}=\frac{2a}{\sqrt{6}}.$$

Πράγματι η ζητούμενη απόσταση ισούται προς $|GH|$, όπου G το βαρύκεντρο του ισοπλεύρου τριγώνου $BA'D$ και H το μέσον της $A'B$: $|GH|=\frac{1}{3}[(2a\sqrt{2})\frac{\sqrt{3}}{2}]=\frac{2a}{\sqrt{6}}$.



[Σχήμα (και λύση) Ορέστη Γκότση]

Περαιτέρω συζήτηση αυτού του προβλήματος υπάρχει στο http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=62&t=30805 .

Γιώργος Μπαλόγλου -- gbaloglou@gmail.com – http://crystallomath.wordpress.com