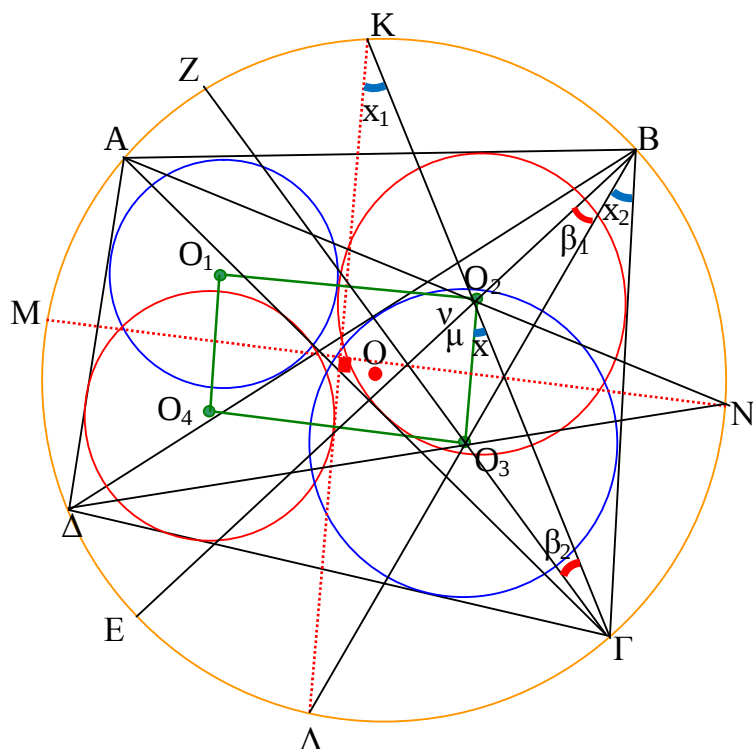


ΙΑΠΩΝΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ



*ABΓΔ εγγράψιμο σε κύκλο (O, R) .
O₁, O₂, O₃, O₄ έκκεντρα και ρ₁, ρ₂, ρ₃,
ρ₄ ακτίνες των εγγεγραμμένων κύκλων
των τριγώνων ABΔ, ABΓ, BΓΔ, ΓΔΑ
αντίστοιχα.*

Ν.δ.ο.: ρ₁ + ρ₃ = ρ₂ + ρ₄

1^η απόδειξη.

Αν το ABΓΔ είναι ορθογώνιο, τότε, προφανώς, η πρόταση ισχύει. Διαφορετικά, επειδή οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές, η μία εξ αυτών είναι οξεία και η άλλη αμβλεία. Έστω, λοιπόν, ότι οι $\hat{A}, \hat{\Delta}$ είναι αμβλείες και οι $\hat{B}, \hat{\Gamma}$ οξείες, και, έστω $d_{AB}, d_{B\Gamma}, d_{\Gamma\Delta}, d_{\Delta A}, d_{A\Gamma}, d_{B\Delta}$ οι αποστάσεις του κέντρου O του κύκλου από τις AB, BΓ, ΓΔ, ΔΑ, ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. (δεν φαίνονται στο σχήμα).

Από το θεώρημα του Carnot στα τρίγωνα ABΔ και BΓΔ και στην συνέχεια στα ABΓ και AΔΓ είναι:

$$(R + \rho_1) + (R + \rho_3) = (d_{AB} - d_{B\Delta} + d_{\Delta A}) + (d_{B\Gamma} + d_{\Gamma\Delta} + d_{B\Delta})$$

$$\text{και} \quad (R + \rho_2) + (R + \rho_4) = (d_{AB} + d_{B\Gamma} + d_{A\Gamma}) + (d_{\Delta A} - d_{A\Gamma} + d_{\Gamma\Delta})$$

απ' όπου, τελικά, επειδή τα δεύτερα μέλη είναι ίσα: $\rho_1 + \rho_3 = \rho_2 + \rho_4$

2^η απόδειξη

Αν K, N, Λ, M είναι τα μέσα των τόξων AB, BΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα, τότε οι ΚΛ και ΜΝ τέμνονται κάθετα, γιατί η γωνία τους έχει μέτρο ίσο με (στη σχέση εμφανίζονται τόξα):

$$\frac{\widehat{MAK} + \widehat{N\Gamma\Lambda}}{2} = \frac{\widehat{\Delta AB}/2 + \widehat{B\Gamma\Delta}/2}{2} = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$$

Το τετράπλευρο O₃O₂BΓ είναι εγγράψιμο γιατί, πχ., όπως εύκολα βρίσκουμε: $\hat{\beta}_1 = \frac{\widehat{AB\Delta}}{2} = \frac{\widehat{A\Gamma\Delta}}{2} = \hat{\beta}_2$

Από την ισότητα, τώρα, των γωνιών $\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = \hat{x}$, είναι O₃O₂ // ΚΛ, και, ομοίως O₁O₄ // ΚΛ, O₁O₂ // ΜΝ, O₃O₄ // ΜΝ. Έτσι, το τετράπλευρο με κορυφές O₁, O₂, O₃, O₄ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες με τις ΚΛ και ΜΝ, οπότε είναι ορθογώνιο. (ή αλλιώς: από τα εγγράψιμα O₃O₂BΓ και O₄O₁ΔΑ είναι

$$\hat{\mu} = O_3\hat{\Gamma}B = \frac{\hat{\Gamma}}{2} \text{ και } \hat{\nu} = O_1\hat{A}B = \frac{\hat{A}}{2} \text{ οπότε } \hat{\mu} + \hat{\nu} = 90^\circ, \text{ δηλαδή } O_3\hat{O}_2O_1 = 90^\circ \text{ κ λ π.)}$$

Από τον τύπο $(OI)^2 = R^2 - 2Rp$, που δίνει την απόσταση του περίκεντρου από το έκκεντρο ενός

τριγώνου, παίρνουμε: $\rho = \frac{R^2 - (OI)^2}{2R}$. Τότε:

$$\rho_1 + \rho_3 = \frac{2R^2 - [(OO_1)^2 + (OO_3)^2]}{2R} \text{ και } \rho_2 + \rho_4 = \frac{2R^2 - [(OO_2)^2 + (OO_4)^2]}{2R}$$

Έστω P το κέντρο (δεν φαίνεται στο σχήμα) του ορθογωνίου O₁O₂O₃O₄. Από το θεώρημα των διαμέσων στα τρίγωνα OO₁O₃ και OO₂O₄ παίρνουμε:

$$(OO_1)^2 + (OO_3)^2 = \frac{4(OP)^2 + (O_1O_3)^2}{2} = \frac{4(OP)^2 + (O_2O_4)^2}{2} = (OO_2)^2 + (OO_4)^2$$

και οι προηγούμενες ισότητες έχουν τα δεύτερα μέλη ίσα και δίνουν το ζητούμενο: $\rho_1 + \rho_3 = \rho_2 + \rho_4$

ΘΕΩΡΗΜΑ Carnot:

Σε οξυγώνιο τρίγωνο ABΓ είναι:

$$R + \rho = d_{AB} + d_{B\Gamma} + d_{A\Gamma}$$

Σε αμβλυγώνιο τρίγωνο με $A > 90^\circ$ είναι:

$$R + \rho = d_{AB} - d_{B\Gamma} + d_{A\Gamma}$$

Στην γενική περίπτωση, με την βοήθεια του Θεωρήματος Carnot, για κάθε εγγράψιμο n -γώνο, που το κέντρο του κύκλου κείται στο εσωτερικό του, αποδεικνύουμε ότι: **το άθροισμα των ακτίνων των εγγεγραμμένων κύκλων, των $n-2$ στο πλήθος τριγώνων, στα οποία χωρίζουν το πολύγωνο οι διαγώνιοί του που άγονται από μια κορυφή του, ισούται με το άθροισμα των αποστάσεων του κέντρου O από τις πλευρές του ελαττωμένο κατά $(n-2)R$.**

(Αν το κέντρο κείται εκτός του n - γώνου, όπως πχ. στο $A_1A_2A_3A_4$ του σχήματος τότε, στο εν λόγω άθροισμα, η απόσταση του κέντρου από την μεγαλύτερη πλευρά εμφανίζεται με αρνητικό πρόσημο, κλπ.)

Πραγματικά, γράφουμε τις ισότητες που προβλέπει το θεώρημα στα $n-2$ τρίγωνα και τις προσθέτουμε κατά μέλη. Οι αποστάσεις του O από κάθε διαγώνιο εμφανίζονται δύο φορές καθεμία με αντίθετα πρόσημα και απλοποιούνται. Για παράδειγμα, η απόσταση $d(O, A_1A_3)$ αναφερόμενη στο τρίγωνο $A_1A_2A_3$ προσμετρείται με πρόσημο « - » και στο $A_1A_3A_4$ με « + ». Στην συνέχεια, λύνουμε ως προς το άθροισμα των ακτίνων των εγγεγραμμένων κύκλων και προκύπτει το ζητούμενο.

