

Μια εφαρμογή του θεωρήματος του Baire

Θεώρημα. Δίνεται μια απεριόριστα παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα: για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $n = n(x) \in \mathbb{N}$ ώστε $f^{(n)}(x) = 0$. Τότε, η f είναι πολυώνυμο.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα. Θεωρούμε το σύνολο A όλων των $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία δεν υπάρχει (ανοικτή) περιοχή του x ώστε αν περιορίσουμε την f εκεί να είναι πολυώνυμο. Τότε, ισχύουν τα εξής:

- Το A είναι μη κενό. Πράγματι: αν ήταν $A = \emptyset$ τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει V_x ανοικτή περιοχή του x και πολυώνυμο p_x ώστε $f|_{V_x} \equiv p_x$. Από ένα επιχείρημα συμπάγειας έχουμε ότι για κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα I υπάρχει p_I πολυώνυμο ώστε $f|_I \equiv p_I$. Έπεται (αν θεωρήσουμε τα $I_n = [-n, n]$) ότι η f είναι πολυώνυμο σ' όλο το $\mathbb{R}$, άτοπο.
- Το A είναι κλειστό. Πράγματι: αν θεωρήσουμε $y \in A^c$ τότε υπάρχει $\delta > 0$ και p_δ πολυώνυμο ώστε $f|_{(y-\delta, y+\delta)} \equiv p_\delta$. Τότε, αν $z \in (y-\delta, y+\delta)$, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $(z-\varepsilon, z+\varepsilon) \subseteq (y-\delta, y+\delta)$, οπότε $f|_{(z-\varepsilon, z+\varepsilon)} \equiv p_\delta$. Δηλαδή, $(y-\delta, y+\delta) \subseteq A^c$. Ώστε, το A^c είναι ανοικτό.

Είναι γνωστό ότι ο A είναι πλήρης μετρικός υπόχωρος του $\mathbb{R}$ με την συνήθη μετρική. Επίσης, τα σύνολα

$$E_n = \{x \in \mathbb{R} : f^{(n)}(x) = 0\}$$

είναι κλειστά αφού είναι τα σύνολα ριζών συνεχών συναρτήσεων. Οπότε, εφαρμόζοντας το θεώρημα του Baire στον υπόχωρο A , βρίσκουμε ότι υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $\text{int}_A(A \cap E_m) \neq \emptyset$. Δηλαδή, υπάρχει $x_0 \in A \cap E_m$ και $\delta > 0$ ώστε

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A \subseteq E_m.$$

Ισχυρισμός 1. Ισχύει $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A \subseteq \bigcap_{j=m}^{\infty} E_j$, δηλαδή αν $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$, τότε $f^{(n)}(x) = 0$ για κάθε $n \geq m$.

Πράγματι: αν δε συμβαίνει αυτό, τότε υπάρχει $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$ και $n > m$ ώστε $f^{(n)}(x) \neq 0$ και $f^{(k)}(x) = 0$ για $m \leq k < n$. Υπάρχει $\eta > 0$ ώστε $(x - \eta, x + \eta) \subseteq (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ και $f^{(n)}(t) \neq 0$ για κάθε $|t - x| < \eta$. Τότε, για κάθε $0 < |z - x| < \eta$ από το θεώρημα του Taylor υπάρχει $t_z \in (x - \eta, x + \eta)$ ώστε

$$f^{(m)}(z) = f^{(m)}(x) + (z-x)f^{(m+1)}(x) + \dots + \frac{(z-x)^{n-m}}{(n-m)!} f^{(n)}(t_z) = \frac{(z-x)^{n-m}}{(n-m)!} f^{(n)}(t_z) \neq 0.$$

Δηλαδή, είναι $(x - \eta, x + \eta) \cap A = \{x\}$. Απ' αυτό έπεται (με ένα επιχείρημα συμπάγειας όπως πριν) ότι η $f|_{(x, x+\eta)}$ είναι πολυώνυμο και όμοια η $f|_{(x-\eta, x)}$ είναι πολυώνυμο. Άρα, η $f|_{(x-\eta, x+\eta)}$ είναι πολυώνυμο. Άτοπο, από τον ορισμό του x .

Ισχυρισμός 2. Ισχύει $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A^c \subseteq \bigcap_{j \geq m} E_j$ (άρα είναι $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \bigcap_{j \geq m} E_j$ και έχουμε άτοπο, το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος).

Πράγματι· έστω $t \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A^c$. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$, πολώνυμο p_ε ώστε $(t - \varepsilon, t + \varepsilon) \subseteq (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ και $f|_{(t-\varepsilon, t+\varepsilon)} \equiv p_\varepsilon$. Έστω $[a, b]$ το μεγιστικό διάστημα, το οποίο περιέχει το t και $f|_{[a, b]} \equiv p_\varepsilon$. Τότε, είτε $a \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$ ή $b \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$ (αν για παράδειγμα $x_0 < t$, τότε $x_0 \leq a$ εφόσον $x_0 \in A$ και $a \in A$ από τη μεγιστικότητα, δηλαδή $a \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$). Ας υποθέσουμε ότι $a \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$ (όμοια η άλλη περίπτωση). Τότε, αν $r = \deg(p_\varepsilon)$, τότε $f^{(r)}(a) \neq 0$ και $f^{(n)}(a) = 0$ για κάθε $n \geq m$ (από τον Ισχυρισμό 1). Οπότε, $r < m$. Δηλαδή, για κάθε $x \in [a, b]$ ισχύει $f^{(n)}(x) = 0$ για κάθε $n \geq m$. Ειδικότερα, $f^{(n)}(t) = 0$ για κάθε $n \geq m$. $\square$