Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ηρακλείου
1ο 3ωρο Τεστ στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης
Σάββατο, 9 Φεβρουαρίου 2013

Θέμα Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

(Μονάδες 9)

Α2. Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f. Να δώσετε τον ορισμό της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της A και να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης σε αυτό. **(Μονάδες 6)**

Α3. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ). **(Μονάδες 2x5)**

(α) Αν μία συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0, τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

(β) Για κάθε μιγαδικό $z = \alpha + \beta i, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $z - \overline{z} = 2\beta$.

(γ) Αν $f(x) = \alpha^x, \alpha > 0$ τότε ισχύει $(\alpha^x)' = x\alpha^{x-1}$.

(δ) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$ τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

(ε) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \epsilon\phi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x | \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ με $f'(x) = -\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

Θέμα Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu(\alpha x)}{x} & x < 0 \\ \sqrt{9x^2 - 2x + 9} - \alpha x & x \geq 0 \end{cases}$

όπου α είναι μη μηδενικός πραγματικός αριθμός.

Β1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3$. **(Μονάδες 5)**

Β2. Να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ **(Μονάδες 5+5)**

Β3. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1, f(1))$. **(Μονάδες 4)**

Β4. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη (ε) του ερωτήματος Β3 τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε ένα τουλάχιστον σημείο B, του οποίου η τετμημένη βρίσκεται στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{3}, 0\right)$. **(Μονάδες 6)**

Θέμα Γ

Έστω η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{για κάθε} \quad x, y > 0$$

Επίσης η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

Γ1. Να βρείτε το $f(1)$. **(Μονάδες 4)**

Γ2. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται. **(Μονάδες 8)**

Γ3. Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2 - x) + f(x) = f(5x - 6)$. **(Μονάδες 7)**

Γ4. Αν $f(x) < 0$ για κάθε $x > 1$, να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$. **(Μονάδες 6)**

Θέμα Δ

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί α, β, γ με μέτρο 1 για τους οποίους ισχύει

$$|2\alpha + \beta + \gamma|^2 + |\alpha + 2\beta + \gamma|^2 + |\alpha + \beta + 2\gamma|^2 = 3$$

Δ1. Αν είναι $z = \alpha + \beta + \gamma$, να αποδείξετε ότι:

α. $z = 0$ **(Μονάδες 4)**

β. οι α, β, γ είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανα δύο και $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0$. **(Μονάδες 3+4)**

γ. $Re(\alpha\overline{\beta}) = Re(\beta\overline{\gamma}) = Re(\gamma\overline{\alpha}) = -\frac{1}{2}$ **(Μονάδες 4)**

δ. $|\alpha - \beta| = |\beta - \gamma| = |\gamma - \alpha| = \sqrt{3}$ **(Μονάδες 3)**

Δ2. Αν Α, Β, Γ είναι οι εικόνες των μιγαδικών α, β, γ αντίστοιχα να βρεθεί ο μιγαδικός που έχει εικόνα το περίκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ. **(Μονάδες 3)**

Δ3. Να αποδείξετε ότι $|\alpha + 1| + \left|\alpha^2 + 1\right| + \left|\alpha^3 + 1\right| \geq 2$. **(Μονάδες 4)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ