ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ι. Αριθμοί

Φυσικοί αριθμοί λέγονται οι αριθμοί $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, ...$
Ακέραιοι αριθμοί λέγονται οι φυσικοί αριθμοί μαζί με το 0 και τους αντίθετους τους.
Ρητοί αριθμοί λέγονται όλα τα κλάσματα με αριθμητή και παρονομαστή ακέραιους, φυσικά με παρονομαστή όχι 0.
Στους φυσικούς αριθμούς έχουμε τις 4 πράξεις. Ιδιαίτερη είναι η διαίρεση. Έστω ότι έχουμε δύο φυσικούς αριθμούς a και b με $a > b$. Τότε ο b 'χωράει' μερικές φορές στον a και ίσως περισσεύει και κάτι. Με άλλα λόγια υπάρχουν δύο άλλοι αριθμοί λ (πηλίκο) και γ (υπόλοιπο) τέτοιοι ώστε $a = \lambda \cdot b + \gamma$ με το γ να είναι $0, 1, 2, 3, ..., b-2$ ή $b-1$. Παράδειγμα: Η διαίρεση του 23 με το 5 δίνει πηλίκο 4 και υπόλοιπο 3. Δηλαδή το 5 χωράει 4 φορές στο 23 και χρειάζεται και 3 μονάδες ακόμα. Δηλαδή $23 = 4 \cdot 5 + 3$. Τα κομπιουτεράκια βέβαια δεν δίνουν αυτήν την διαίρεση αλλά σου δίνουν τον δεκαδικό που ισούται ακριβώς με a/b. Πάντως ο αριθμός που δίνουν, χωρίς το κομμάτι μετά την υποδιαστολή, είναι το πηλίκο.
Οι αριθμοί $2, 4, 6, 8, 10, 12, ...$ οι οποίοι όταν διαιρεθούν με το 2 αφήνουν υπόλοιπο 0 ονομάζονται ζυγοί ή άρτιοι.
Οι αριθμοί $1, 3, 5, 7, 9, 11, ...$ οι οποίοι όταν διαιρεθούν με το 2 αφήνουν υπόλοιπο 1 ονομάζονται μονοί ή περιττοί.
Ως γνωστόν οι αριθμοί $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ λέγονται και ψηφία.
Άθροισμα λέγεται το αποτέλεσμα μίας πρόσθεσης.
Γινόμενο λέγεται το αποτέλεσμα ενός πολλαπλασιασμού.
Δύο φυσικοί αριθμοί λέγονται διαδοχικοί αν διαφέρουν κατά μία μονάδα. Παράδειγμα: $32, 33$

ΙΙ. Άλγεβρα

Ας σκεφτούμε το πρόβλημα: Βρείτε έναν αριθμό τέτοιον ώστε αν στο τριπλάσιο του προσθέσουμε 4 να παίρνουμε 25. Σίγουρα κάποιος αν το ψάξει λίγο να έβρισκε ότι ο αριθμός 7 είναι τέτοιος μόνο με την σκέψη του. Αν όμως οι αριθμοί στο πρόβλημα ήταν πολύ μεγάλοι (πενταψήφιοι για παράδειγμα)? Αν

εκτός από αυτόν που βρήκαμε υπάρχει και άλλος? Οδηγούμαστε λοιπόν στο να βρούμε έναν τρόπο να λύνουμε τέτοια προβλήματα με απόλυτη βεβαιότητα και πολύ πιο εύκολα. Το κόλπο εδώ είναι να αρχίσουμε να χρησιμοποιούμε μεταβλητές. Κοιτάξτε πόσο εύκολα λύνεται το αρχικό πρόβλημα: Έστω x ο αριθμός που ψάχνουμε. Τότε η ιδιότητα μεταφράζεται σε $3x + 4 = 25$. Τότε $3x = 21$. Τότε $x = 7$! Αφού αρχίσουμε σιγά σιγά να σκεφτόμαστε τους αριθμούς ως γράμματα, έρχεται η ώρα να μάθουμε κάποιους χειρισμούς για να τα επεξεργαζόμαστε εύκολα. Η Άλγεβρα είναι ο κλάδος των μαθηματικών που ασχολείται ακριβώς με αυτό. Δηλαδή τις ιδιότητες και τις αλγεβρικές τεχνικές, όχι βέβαια για να κάνουμε τη ζωή μας δύσκολη με πάρα πολλές και κουραστικές πράξεις αλλά για να μπορούμε να λύνουμε προβλήματα.

Ακολουθούν μερικές ιδιότητες των αριθμών. Οι περισσότερες είναι προφανείς και εύκολες από την πείρα μας για τους φυσικούς αριθμούς. Στο πλαίσιο της άλγεβρας συζητάμε για αριθμούς που τους λέμε πραγματικούς. Αυτοί περιλαμβάνουν όλους τους αριθμούς που συναντά κανείς στο σχολείο, φυσικούς, αρνητικούς, κλάσματα και ρίζες. Το πώς διαχωρίζονται μεταξύ τους τα διάφορα αυτά σύνολα των αριθμών είναι μια μεγάλη συζήτηση που μπορεί να δούμε άλλη φορά. Από εδώ και πέρα κάθε γράμμα θα συμβολίζει ένα τυχαίο πραγματικό αριθμό. Με ab εννοούμε πολλαπλασιασμό δηλαδή $a \cdot b$.

$$a + b = b + a \qquad ab = ba \qquad a + 0 = a \qquad a \cdot 1 = a$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c \qquad a + (-a) = 0 \qquad a \cdot \frac{1}{a} = \frac{a}{a} = 1$$

$$a \cdot 0 = 0 \qquad a(bc) = (ab)c \qquad a(b + c) = ab + ac$$

$$1 \cdot (-1) = -1 \qquad (-1) \cdot (-1) = 1 \qquad a(-b) = (-a)b = -ab$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c} \qquad \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd} \qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

Τώρα γιατί όλες οι ιδιότητες έχουν μόνο πρόσθεση και πολ/σμό και όχι αφαίρεση και διαίρεση? Διότι λόγω των ιδιοτήτων $a - b = a + (-b)$ και $a : b = a \cdot \frac{1}{b}$ η αφαίρεση είναι απλά πρόσθεση με τον αντίθετο και η διαίρεση είναι απλά πολ/σμός με τον αντίστροφο.

Τι κάνουμε αν έχουμε πρόσθεση κλασμάτων τα οποία δεν έχουν ίδιο παρονομαστή? Φτιάχνουμε ίδιους παρονομαστές! Είναι αυτό που λέμε καπελάκια!

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{d}=\frac{a}{c}\cdot 1+\frac{b}{d}\cdot 1=\frac{a}{c}\cdot\frac{d}{d}+\frac{b}{d}\cdot\frac{c}{c}=\frac{ad}{cd}+\frac{bc}{cd}=\frac{ab+cd}{cd}$$

Ιδιότητες σε μια ισότητα: Αν $a\cdot b=0$ τότε $a=0$ ή $b=0$. Επίσης αν έχουμε μια ισότητα τότε μπορούμε να προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό ή να πολλαπλασιάσουμε με τον ίδιο αριθμό και τα δύο μέλη. Με σύμβολα: Αν $x=y$ τότε $x+z=y+z$ και $xz=yz$. Για μια ακόμα φορά αυτές οι ιδιότητες είναι πολύ λογικές και δεν τις μαθαίνουμε για να κάνουμε τη ζωή μας δύσκολη, το αντίθετο. Πράγματι αν για παράδειγμα $3=3$ τότε και συν 2 θα πάρουμε $5=5$ ή επί 7 θα πάρουμε $21=21$. Φυσικά όπως εξηγήσαμε μπορούμε και να αφαιρέσουμε ή να διαιρέσουμε με τον ίδιο αριθμό. Μόνο που στην περίπτωση της διαίρεσης δεν επιτρέπεται να διαιρέσουμε με 0. Τώρα είμαστε στο σημείο να δούμε γιατί μαθαίναμε πάντα ότι απαγορεύεται η διαίρεση με 0. Η ισότητα $0\cdot 7=0\cdot 9$ είναι φυσικά σωστή αφού και τα δύο μέλη είναι 0. Αν μπορούσαμε να διαιρέσουμε με 0 τότε τα 0 θα απλοποιούνταν και θα παίρναμε $7=9$ το οποίο δεν είναι σωστό!

Δυνάμεις: Με το σύμβολο a^ν εννοούμε τον πολ/σμο του a επί τον εαυτό του ν φορές. Το a λέγεται βάση της δύναμης και το ν εκθέτης της δύναμης. Το a^2 εκτός από a στην δευτέρα διαβάζεται και a στο τετράγωνο. Επίσης το a^3 λέγεται και a στον κύβο. Παράδειγμα: $2^5=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=32$. Ορίζουμε $a^{-\nu}=\frac{1}{a^\nu}$ και $a^0=1$. Και οι δυνάμεις έχουν ιδιότητες για εύκολους χειρισμούς οι οποίες είναι και πολύ λογικές

$$a^1=a \qquad a^\mu a^\nu=a^{\mu+\nu} \qquad \frac{a^\mu}{a^\nu}=a^{\mu-\nu} \qquad (a^\mu)^\nu=a^{\mu\nu}$$
$$(ab)^\nu=a^\nu b^\nu \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^\nu=\frac{a^\nu}{b^\nu}$$

Για παράδειγμα η δεύτερη γιατί είναι σωστή? Το πρώτο μέλος λέει ότι έχουμε πρώτα μ a και μετά ν a ενώ το δεύτερο μέλος λέει ότι συνολικά έχουμε $\mu+\nu$ a. Άρα προφανώς αυτά τα δύο μέλη είναι ίσα. Εξηγήστε εσείς γιατί η τέταρτη ιδιότητα με τη δύναμη μιας δύναμης και η πέμπτη με τη δύναμη ενός γινομένου

είναι πολύ λογικές ιδιότητες.

Ρίζες: Το a^2 λέει να πολλαπλασιάσουμε τον αριθμό a με τον εαυτό του, δηλαδή $a^2 = a \cdot a$. Ποιά είναι η αντίστροφη διαδικασία? Έστω ότι θέλουμε να βρούμε έναν αριθμό που το τετράγωνο του είναι το 36. Με λίγο ψάξιμο βρίσκουμε ότι είναι το 6. Αν όμως ψάχναμε τον αριθμό που το τετράγωνο του δίνει 40? Επειδή $6^2 = 36$ και $7^2 = 49$ αυτός ο αριθμός που ψάχνουμε είναι ανάμεσα στο 6 και στο 7. Αυτόν λοιπόν τον αριθμό τον συμβολίζουμε με $\sqrt{40}$ και λέγεται τετραγωνική ρίζα ή απλά ρίζα του 40. Για παράδειγμα: $\sqrt{81} = 9$ και $\sqrt{100} = 10$ αλλά όλα τα ενδιάμεσα $\sqrt{82}, \sqrt{83}, \sqrt{84}, ..., \sqrt{98}, \sqrt{99}$ τα αφήνουμε όπως είναι. Ιδιότητες ριζών:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \qquad (\sqrt{a})^2 = a$$

Παρατηρείστε ότι η τρίτη ιδιότητα είναι ακριβώς αυτό που λέει ο ορισμός. Τέλος λόγω των γνωστών ιδιοτήτων συν επί συν μας κάνει συν και πλην επί πλην μας κάνει συν παρατηρούμε ότι το τετράγωνο ενός αριθμού είναι πάντα θετικό ή μηδέν. Ποτέ αρνητικό. Για αυτό το λόγο μιλάμε μόνο για ρίζες μη αρνητικών αριθμών.

Τώρα που έχουμε όλες αυτές τις ιδιότητες πάμε να τις δούμε να δουλεύουν.

Ταυτότητες: Οι ταυτότητες είναι ισότητες που ισχύουν για όλους τους αριθμούς. Παράδειγμα:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Αυτή η σχέση είναι σωστή για όλους τους αριθμούς a, b που υπάρχουν. Το ότι όμως εμείς ισχυριζόμαστε ότι είναι αλήθεια δεν φτάνει. Μπορεί κάποιος κάλλιστα να μην το πιστεύει. Το ότι ισχύει παράδειγμα για το 2 και το 3 διότι $(2+3)^2 = 5^2 = 25$ και $2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 + 3^2 = 4 + 12 + 9 = 25$ πάλι δεν φτάνει. Μπορεί να έτυχε και να υπάρχουν άλλοι αριθμοί για τους οποίους να μην ισχύει. Πρέπει λοιπόν εμείς με λογικά βήματα να το αποδείξουμε. Πράγματι έχουμε:

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a\cdot(a+b) + b\cdot(a+b) = a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b =$$

$$a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Στην πρώτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το τι σημαίνει δύναμη. Στη δεύτερη και

στην τρίτη ισότητα την επιμεριστική ιδιότητα. Στην τέταρτη ισότητα τις απλές σχέσεις $a \cdot a = a^2$, $b \cdot b = b^2$. Στην πέμπτη ισότητα την αντιμεταθετική ιδιότητα. Στη τελευταία ισότητα την προφανή σχέση $ab + ab = 2ab$. Προσπαθείστε να εξηγήσετε τα βήματα στην παρακάτω απόδειξη της ταυτότητας που ονομάζεται διαφορά τετραγώνων, $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$. Απόδειξη:

$$(a - b) \cdot (a + b) = (a - b) \cdot a + (a - b) \cdot b = a \cdot (a - b) + b \cdot (a - b) =$$

$$a \cdot a - ab + ba - b \cdot b = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

Παρατηρείστε ότι ξεκινήσαμε την απόδειξη από το σύνθετο μέλος και με λογικά βήματα φτάσαμε στο απλό μέλος.

Εξισώσεις: Εξίσωση λέγεται μια ισότητα η οποία περιέχει έναν άγνωστο. Η μεγαλύτερη δύναμη του αγνώστου λέγεται βαθμός της εξίσωσης. Χρήσιμες και πλήρως λυμένες είναι οι εξισώσεις πρώτου και δευτέρου βαθμού που θα δούμε τώρα.

Η εξίσωση πρώτου βαθμού είναι γενικά η $ax + b = 0$ όπου ψάχνουμε το x ενώ τα a και b είναι γνωστά. Με την προϋπόθεση ότι το a δεν είναι 0 βρίσκουμε την λύση ως εξής. Πρώτα προσθέτουμε και στα δύο μέλη τον αριθμό $-b$. Παίρνουμε $ax + b + (-b) = -b$ δηλαδή $ax = -b$. Τώρα πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με $\frac{1}{a}$ και παίρνουμε $\frac{1}{a}ax = \frac{1}{a}(-b)$. Άρα $x = -\frac{b}{a}$ και την λύσαμε!

Η εξίσωση δευτέρου βαθμού είναι γενικά η $ax^2 + bx + c = 0$ με $a \neq 0$. Συνήθως στο σχολείο μαθαίνει κανείς τις λύσεις απ'εξω. Εδώ θα δούμε πως βρίσκονται οι λύσεις από την αρχή όπως το κάναμε και στην πρώτου βαθμού. Έχοντας στο μυαλό μας την ταυτότητα $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ προχωράμε ως εξής: Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση με $\frac{1}{a}$ και παίρνουμε

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Αυτή τη σχέση την γράφουμε τώρα ως εξής

$$x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Τώρα σκεφτόμαστε ότι για να φτιάξουμε την γνωστή ταυτότητα πρέπει να προσθέσουμε και στα δύο μέλη το $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$. Κάνοντας το αυτό και μεταφέροντας

τον όρο $\frac{c}{a}$ στο άλλο μέλος έχουμε

$$x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

Τελικά έχουμε

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

Κάνοντας πράξεις στο δεξιό μέλος έχουμε

$$\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Άρα έχουμε

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Τώρα έχουμε ένα τετράγωνο στο αριστερό μέλος. Άρα αν το δεξί μέλος είναι μη αρνητικό τότε θα ισχύει φυσικά ότι

$$x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

ή

$$x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

από το πώς ορίσαμε τις ρίζες. Τελικά αλλάζοντας μέλος το $\frac{b}{2a}$ και χρησιμοποιώντας το ότι $\sqrt{4a^2} = 2a$ προκύπτουν τελικά οι δύο λύσεις

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Αν ο αριθμός $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ είναι αρνητικός τότε ο αριθμητής $b^2 - 4ac$ είναι αρνητικός διότι ο παρονομαστής είναι πάντα θετικός. Ο αριθμός αυτός $\Delta = b^2 - 4ac$ λέγεται διακρίνουσα και μας δείχνει αν έχει λύσεις η δευτεροβάθμια. Αν είναι αρνητική τότε δεν έχει λύσεις. Αν είναι θετική ή 0 τότε παίρνουμε τις δύο λύσεις

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Προσπαθήστε να ξαναβγάλετε μόνοι σας αυτόν τον τύπο για να προπονηθείτε στις πράξεις. Χρειάστηκαν όλα: ταυτότητα, πράξεις κλασμάτων, δυνάμεις και

ιδιότητες ριζών.

III. Γεωμετρία

Ένα τρίγωνο λέγεται ορθογώνιο αν έχει μία γωνία 90 μοιρών. Η πλευρά απέναντι από αυτή τη γωνία λέγεται υποτείνουσα ενώ οι άλλες δύο κάθετες πλευρές. Για όλα τα ορθογώνια τρίγωνα ισχύει μία σχέση που συνδέει τις πλευρές του με απλό τρόπο. Είναι το πιο διάσημο αποτέλεσμα των μαθηματικών, το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Λέει ότι αν η υποτείνουσα έχει μήκος a και οι άλλες δύο πλευρές έχουν μήκος b και c τότε $a^2 = b^2 + c^2$. Περισσότερα για Γεωμετρία άλλη φορά.

IV. Προβλήματα

1. Να χωρίσετε τους αριθμούς $1, 2, 3, 4, 5, 6$ και 7 σε δύο ομάδες έτσι ώστε το άθροισμα των αριθμών στη μία ομάδα να είναι ίσο με το άθροισμα των αριθμών στην άλλη ομάδα.

2. Γράφουμε τη λέξη ΚΑΠΕΛΟ ξανά και ξανά τη μία δίπλα στην άλλη χωρίς κενά. Θα σχηματιστεί η λέξη ΚΑΠΕΛΟΚΑΠΕΛΟΚΑΠΕΛΟΚΑΠΕΛΟ... Ποιό γράμμα θα είναι στην 34η θέση? Ποιό γράμμα θα είναι στην 100ή θέση? Ποιό γράμμα θα είναι στην 746η θέση?

3. Έχουμε πολλά κουτάκια στη σειρά τα οποία έχουν ταμπελίτσες με τους φυσικούς αριθμούς. Το 1ο κουτάκι είναι μπλε, το 2ο κόκκινο και το 3ο πράσινο. Από εκεί και μετά τα χρώματα επαναλαμβάνονται με την ίδια σειρά. Τι χρώμα έχει το 83ο κουτάκι? Το 300ο? Γενικά πώς θα βρούμε τι χρώμα έχει οποιοδήποτε κουτάκι?

4. Πόσο κάνει $8 + 8 + 8 + ... + 8$ όπου εμφανίζονται 37 οκτάρια? Πόσο κάνει $7+7+7+...+7+9+9+9+...+9$ όπου εμφανίζονται 62 επτάρια και 84 εννιάρια?

5. Πόσο κάνει $5+5+5+...+5$ όπου εμφανίζονται 74 πεντάρια? Το $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot ... \cdot 5$ όπου εμφανίζονται 74 πεντάρια είναι πάρα πολύ μεγάλος αριθμός για να τον γράψουμε. Πώς τον συμβολίζουμε με απλό τρόπο?

6. α) Να βρείτε τρεις διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς με άθροισμα 24.

β) Να βρείτε τρεις διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς με άθροισμα 8511.

Υπόδειξη: Το α) μπορείται να το λύσετε μόνο με τη σκέψη σας. Στο β) καλύτερα να χρησιμοποιήσετε εξίσωση.

7. Έχουμε τρία καγκουρό που ξέρουν μαθηματικά. Το πρώτο, που λέγεται Αλ, ξέρει να πολλαπλασιάζει αριθμούς επί 3. Το δεύτερο, ο Βαλ, ξέρει να προσθέτει 2 στους αριθμούς και το τρίτο, ο Γαλ, ξέρει να αφαιρεί 1 από τους αριθμούς. Με ποιά σειρά πρέπει να κάνουν πράξεις τα τρία καγκουρό, από μία φορά το καθένα, για να μετατρέψουν το 3 σε 14?

8. Βρείτε όλους τους τριψήφιους αριθμούς οι οποίοι έχουν άθροισμα ψηφίων 5.

9. Γίνετε να χωριστούν οι αριθμοί $1, 2, 3, 4, 5, 6$ σε δύο ομάδες με το ίδιο άθροισμα?

Υπόδειξη: Αν γινόταν, το άθροισμα όλων των αριθμών θα ήταν άρτιος ή περιττός?

10. Βρείτε όλους τους διψήφιους αριθμούς με γινόμενο ψηφίων 12.

11. Πόσα ψηφία έχει ο αριθμός $N = 12345678910111213...9899100$?

12. Βρείτε τον επόμενο αριθμό (δηλαδή βρείτε με ποιά λογική φτιάχνονται οι αριθμοί) στα παρακάτω

$$1, 2, 3, 4, 5, ...$$

$$3, 6, 9, 12, 15, ...$$

$$3, 1, -1, -3, -5, ...$$

$$1, 4, 9, 16, 25, ...$$

$$1, 3, 7, 15, 31, 63, ...$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...$$

$$2, 4, 7, 11, 16, 22, ...$$

$$1, 2, 6, 42, 1806, ...$$

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...$$

Να εξηγήσετε τη λογική σας. Η δυσκολία αυξάνει με τη σειρά. Το τελευταίο είναι δύσκολο να το βρείτε. Παρόλαυτα αυτοί είναι οι πιο σημαντικοί και οι πιο όμορφοι αριθμοί σε όλα τα μαθηματικά.

Τα επόμενα προβλήματα είναι για προπόνηση με τις πράξεις και την άλγεβρα:

13. Ποιά από τα παρακάτω είναι πάντα σωστά? Για τα σωστά εξηγήστε πως προκύπτουν από τις ιδιότητες. Για τα υπόλοιπα δείξτε με αριθμούς ότι δεν είναι πάντα σωστά.

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 \qquad (ab)^2 = a^2b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - b^2 \qquad x^3 + x^5 = x^8$$

$$x+2x+3x = 5x \qquad (y+2y)\cdot 3y = 9y^2 \qquad \sqrt{a+b} = \sqrt{a}+\sqrt{b} \qquad \frac{a}{b}+\frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

$$x \cdot x = 2x \qquad \frac{x}{y} : \frac{z}{w} = \frac{xz}{yw} \qquad (a^5)^2 = a^7$$

14. Το τριπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 18 ισούται με το τετράγωνο του αριθμού. Να βρεθεί ο αριθμός αυτός.

15. Αποδείξτε τις παρακάτω ταυτότητες:

α) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
β) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
γ) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
δ) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
ε) $(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$
ζ) $(a^2+b^2)^2 = (a^2-b^2)^2 + (2ab)^2$
η) Για κάθε $x \neq 0, -1$

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x}$$

ϑ) Ταυτότητα του Lagrange:

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) = (ax+by)^2 + (ay-bx)^2$$

ι) Ταυτότητα του Euler:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

16. Η ταυτότητα ε) στο προηγούμενο πρόβλημα μας βοηθάει μερικές φορές να λύνουμε μια εξίσωση 2ου βαθμού ακόμα πιο εύκολα από το να χρησιμοποιούσαμε διακρίνουσα. Παράδειγμα: Να λυθεί η εξίσωση $x^2 - 8x + 15 = 0$. Κοιτώντας την ταυτότητα θέλουμε δύο αριθμούς με άθροισμα 8 και γινόμενο 15. Με σκέψη βρίσκουμε ότι αυτοί είναι οι 3 και 5. Άρα από την ταυτότητα $(x-3)(x-5) = 0$. Άρα αφού ένα γινόμενο είναι 0 ή ο ένας παράγοντας είναι 0 ή ο άλλος. Άρα $x - 3 = 0$ ή $x - 5 = 0$. Άρα λύσεις είναι οι αριθμοί 3 και 5 που είχαν άθροισμα 8 και γινόμενο 15. Φυσικά και με διακρίνουσα τις ίδιες λύσεις θα βρίσκαμε. Λύστε με αυτό το κόλπο γρήγορα τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $x^2 - 4x + 4 = 0$
β) $x^2 - 7x + 10 = 0$
γ) $x^2 - 15x + 56 = 0$
δ) $x^2 - 2x - 15 = 0$
ε) $x^2 - (\sqrt{2} + 3)x + 3\sqrt{2} = 0$
ζ) $x^2 + 10x + 25 = 0$

17. Λύστε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $3x - 5 = x + 7$
β) $3(7 + x) = 8 - x$
γ) $(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$
δ) $(x - 3)(x^2 - 5x + 6) = 0$
ε) $3(x^2 + 7) = x(x - 1) + 5x + 21$

18. Βρείτε το λάθος στο παρακάτω επιχείρημα.

Έστω τυχαίοι ίσοι αριθμοί $a = b$ όχι 0. Πολλαπλασιάζοντας επί a παίρνουμε $a^2 = ab$. Αφαιρώντας b^2 παίρνουμε $a^2 - b^2 = ab - b^2$. Διαφορά τετραγώνων και κοινός παράγοντας $(a-b)(a+b) = b(a-b)$. Απλοποιώντας το $a - b$ παίρνουμε $a + b = b$. Από την πρώτη σχέση παίρνουμε $a + a = a$. Άρα $2a = a$. Άρα διαιρώντας με a προκύπτει ότι $2 = 1$.

19. Πάρτε έναν οποιονδήποτε ακέραιο αριθμό. Πολλαπλασιάστε τον με τον

μεθεπόμενο του. Τότε το αποτέλεσμα που βρήκατε είναι πάντα κατά ένα λιγότερο από το τετράγωνο του αριθμού που βρίσκεται ανάμεσα τους. Παράδειγμα: $4 \cdot 6 = 24$ και $5 \cdot 5 = 25$. Κάντε μερικά δικά σας παραδείγματα για να πειστείτε. Αποδείξτε ότι αυτό συμβαίνει για οποιαδήποτε τριάδα διαδοχικών αριθμών.

20. Πάρτε τέσσερις οποιουσδήποτε διαδοχικούς ακέραιους αριθμούς. Πολλαπλασιάστε τον πρώτο με τον τελευταίο. Τότε το αποτέλεσμα που βρήκατε είναι πάντα κατά δύο λιγότερο από το γινόμενο των δύο μεσαίων αριθμών. Παράδειγμα: $7 \cdot 10 = 70$ και $8 \cdot 9 = 72$. Κάντε μερικά δικά σας παραδείγματα για να σιγουρευτείτε. Αποδείξτε ότι αυτό συμβαίνει για οποιαδήποτε τετράδα διαδοχικών αριθμών.

21. Μερικές φορές για τους αριθμούς ισχύουν κάποια πολύ όμορφα πράγματα. Για παράδειγμα αν προσθέσουμε όλες τις συνεχόμενες δυνάμεις του 2 βρίσκουμε πάντα έναν αριθμό ο οποίος είναι κατά δύο μονάδες μικρότερος από την επόμενη δύναμη του 2. Παράδειγμα: $2^1 + 2^2 + 2^3 = 2 + 4 + 8 = 14$ ενώ $2^4 = 16$, $2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 2 + 4 + 8 + 16 = 30$ ενώ $2^5 = 32$. Επαληθεύστε ότι $2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 2^6 - 2$ και ότι $2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 = 2^7 - 2$. Επίσης με αυτό το κόλπο υπολογίστε γρήγορα πόσο κάνει $2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10}$.

22. Να γράψετε με σύμβολα τις παρακάτω φράσεις:

α) Το τριπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 5.
β) Το άθροισμα των τετραγώνων τριών αριθμών.
γ) Το εξαπλάσιο ενός αριθμού είναι μεγαλύτερο από το τετράγωνου του μειωμένο κατά 7.
δ) Το τετράγωνο του γινόμενου δύο αριθμών.
ε) Το πηλίκο των τετραγώνων δύο αριθμών είναι ίσο με το άθροισμα των αριθμών αυτών.
ζ) Ένας αρνητικός αριθμός.
η) Το άθροισμα των ριζών δύο αριθμών.
θ) Η ρίζα του αθροίσματος δύο αριθμών.

23. Να κάνετε τις πράξεις ώστε να απλοποιηθούν οι αριθμοί:

$$A = \frac{35}{\sqrt{49}} + 3^2 \qquad B = 2 - \frac{7}{2^3} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \qquad \Gamma = \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}}$$

$$\Delta = 2\cdot\left(3\cdot\Big(4-2\cdot(3-6)+4\Big)-3\right) \qquad E = \sqrt{(\sqrt{47} - \sqrt{22})(\sqrt{47} + \sqrt{22})}$$

24. Να γίνουν οι πράξεις:

$$\frac{(ab)^2 \cdot b^{-1} \cdot (a^2b)^{-3} \cdot a^3}{a^2b^{-2} \cdot (b^2a)^{-1} \cdot a \cdot (a^2ba)^{-2}}$$

25. Αν

$$\Pi = \frac{ab^{-2} \cdot (a^{-1}b^2)^4 \cdot (ab^{-1})^2}{a^{-2}b \cdot (a^2b^{-1})^3 \cdot a^{-1}b}$$

και $a = 10^{-3}, b = 10^{-2}$ να αποδείξετε ότι $\Pi = 100$.

26. Αν $a + b + c = 1997$ και $b + 2c = 15$ να απλοποιήσετε την παράσταση $A = a + 2b + 3c$.

Οι επόμενες δύο ασκήσεις είναι κουραστικές. Αν μπορεί όμως κάποιος να τις λύσει τότε οι πράξεις του είναι σε καλό επίπεδο. Στη πρώτη ξεκινάμε φυσικά από το σύνθετο μέλος. Θυμόμαστε και ότι $a : b = \frac{a}{b}$. Στην δεύτερη ξεκινάμε και από τα δύο μέλη και φτάνουμε στον ίδιο αριθμό.

27*. Να αποδείξετε ότι

$$\left(2 + \frac{3}{4} + \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{3 + \frac{4}{5}} - \frac{1 + \frac{2}{3}}{2 + \frac{1}{2}}\right) : \left(1 + \frac{77}{228}\right) = 5$$

28*. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{2} - 1}{\frac{2^2}{3^2} + \frac{2}{3} + 1} = \frac{2 - 3}{1 + \frac{3}{2}} \cdot \frac{1 + \frac{2^3}{3^3}}{\frac{2^2}{3} - \frac{3^2}{2}}$$

29. Πάρτε δύο τυχαίους φυσικούς αριθμούς που είναι διαδοχικοί. Υπολογίστε τα τετράγωνα τους και μετά αφαιρέστε τα. Ο αριθμός που βρήκατε είναι το άθροισμα των δύο αριθμών που επιλέξατε στην αρχή! Παράδειγμα: $6^2 = 36, 7^2 =$

$49, 49 - 36 = 13$ και $6 + 7 = 13$. Κάντε μερικά δικά σας πειράματα για να το επαληθεύσετε. Μετά προσπαθήστε να αποδείξετε ότι αυτό ισχύει για όλους τους αριθμούς που υπάρχουν.

30*. Να απλοποιήσετε τους αριθμούς

$$A = 317 \cdot 5172 \cdot 0 \cdot 5 \cdot 6189 \cdot 35$$

$$B = (-1)^{2011} \qquad \Gamma = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot ... \cdot \frac{99}{100} \cdot 100$$

$$\Delta = \frac{2^{500}}{4^{250}} \qquad E = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + ... + 499 + 500}{2 + 4 + 6 + 8 + ... + 998 + 1000}$$

Σημείωση: Και τα πέντε θέλουν σκέψη αλλά χρειάζονται μόνο απλές ιδιότητες που ξέρετε.

31. Έστω $a + b = 0$. Αποδείξτε με δύο τρόπους ότι $a^3 + b^3 = 0$.

32. Έστω τρεις αριθμοί με άθροισμα 0. Αποδείξτε ότι το άθροισμα των κύβων τους είναι τριπλάσιο του γινομένου τους.

Υπόδειξη: Η πιο απλή απόδειξη είναι από την ταυτότητα του Euler. Υπάρχει όμως και άλλη μια απόδειξη, λύνοντας τη δοσμένη σχέση ως προς τον ένα αριθμό και αντικαθιστώντας στην ζητούμενη.

33.** Σε ένα πρωτάθλημα τένις πήραν μέρος ν αθλητές. Κάθε ένας έπαιξε ακριβώς μία φορά με κάθε έναν από τους υπόλοιπους αθλητές. Αν ο αθλητής κ όπου $1 \leq \kappa \leq \nu$ είχε A_κ νίκες και B_κ ήττες, αποδείξτε ότι

$$A_1^2 + A_2^2 + ... + A_\nu^2 = B_1^2 + B_2^2 + ... + B_\nu^2$$

Υπόδειξη: Φέρτε τα αντίστοιχα B_κ στο πρώτο μέλος και κάντε τις αντίστοιχες διαφορές τετραγώνων.

34.** α) Να αποδείξετε την ταυτότητα

$$\Big(x(x-1)\Big)^2 + \Big((x+1)(x-1)\Big)^2 = 2x^4 - 2x^3 - x^2 + 1$$

β) Να λύσετε την εξίσωση $2x^4 - 2x^3 - x^2 + 1 = 0$.

Υπόδειξη: α) Πράξεις.
β) Παραγοντοποίηση ή χρησιμοποιώντας κατάλληλα το α) και τη σχέση $a^2 \geq 0$ που ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό a.

35*.** Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha - 4\beta + 6\gamma + 14 = 0$$

Μερικά προβλήματα γεωμετρίας και γρίφοι:

36. Έχουμε τρία κουτιά. Το πρώτο περιέχει μπλε μπαλάκια. Το δεύτερο περιέχει κόκκινα μπαλάκια. Το τρίτο περιέχει και μπλε και κόκκινα μπαλάκια. Τα κουτιά είναι κλειστά και έχουν ταμπελίτσες που λένε ΜΠΛΕ, ΚΟΚΚΙΝΑ, και ΜΠΛΕ ΚΑΙ ΚΟΚΚΙΝΑ αναλόγως το τι περιέχουν. Κάποιος άλλαξε τις ταμπελίτσες και τώρα κανένα κουτί δεν έχει την σωστή ταμπελίτσα που είχε στην αρχή. Έχουμε το δικαίωμα να τραβήξουμε από ένα μόνο κουτί ένα μπαλάκι και να δούμε τι χρώμα έχει. Από ποιό κουτί θα τραβήξουμε για να είμαστε σε θέση να ξαναβάλουμε στα κουτιά τις σωστές ταμπελίτσες?

37. Ένα πλοίο ξεκινάει από το λιμάνι Α και ταξιδεύει 5 μίλια νότια, στη συνέχεια 6 μίλια ανατολικά, ξανά 3 μίλια νότια και αγκυροβολεί στο λιμάνι Β. Πόσα μίλια απέχει το λιμάνι Α από το λιμάνι Β?

Υπόδειξη: Σχεδιάστε το σχήμα. Θυμηθείτε το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

38. Πόσα κοινά σημεία μπορεί να έχει ένας κύκλος και μία ευθεία? Με άλλα λόγια μπορείτε να σχεδιάσετε στο επίπεδο έναν κύκλο και μια ευθεία που να έχουν 0 κοινά σημεία? 1? 2? 3?...

39. Πόσα κοινά σημεία μπορεί να έχει ένας κύκλος και ένα τρίγωνο? Με άλλα λόγια μπορείτε να σχεδιάσετε στο επίπεδο έναν κύκλο και ένα τρίγωνο που να έχουν 0 κοινά σημεία? 1? 2? 3?...

40*. Με τη βοήθεια μιας κλεψύδρας 5 λεπτών και μίας 7 λεπτών να μετρήσετε χρόνο 9 λεπτών.

41. Έχετε άπειρα ίδια πλακάκια σε σχήμα τετραγώνου. Καλύψτε με αυτά όλο το επίπεδο (επίπεδο είναι θεωρητικά κάτι σαν ένα άπειρο προς όλες τις κατευθύνσεις φύλλο χαρτιού).

42*. Έχετε άπειρα ίδια πλακάκια σε σχήμα τυχαίου τριγώνου. Καλύψτε με αυτά όλο το επίπεδο.

43. Έχουμε τις παρακάτω δέκα προτάσεις. Ποιές από αυτές είναι αληθείς και ποιές ψευδείς?

1) Μία μόνο από αυτές τις προτάσεις είναι ψευδής.
2) Δύο μόνο από αυτές τις προτάσεις είναι ψευδείς.
3) Τρεις μόνο από αυτές τις προτάσεις είναι ψευδείς.
4) Τέσσερις μόνο από αυτές τις προτάσεις είναι ψευδείς.
5) Πέντε μόνο από αυτές τις προτάσεις είναι ψευδείς.
6) Έξι μόνο από αυτές τις προτάσεις είναι ψευδείς.
7) Επτά μόνο από αυτές τις προτάσεις είναι ψευδείς.
8) Οκτώ μόνο από αυτές τις προτάσεις είναι ψευδείς.
9) Εννέα μόνο από αυτές τις προτάσεις είναι ψευδείς.
10) Δέκα από αυτές τις προτάσεις είναι ψευδείς.

44. Δύο φίλοι παίζουν το παρακάτω παιχνίδι. Βάζουν μπροστά τους 21 σπίρτα και ο καθένας με τη σειρά του παίρνει από 1 έως 3 από τα σπίρτα αυτά. Νικητής είναι αυτός που θα πάρει το τελευταίο σπίρτο, δηλαδή κερδίζει κάποιος αν ο αντίπαλός του δεν έχει σπίρτα να πάρει. Ποιά στρατηγική θα πρέπει να ακολουθήσει ο πρώτος παίκτης ώστε να κερδίσει στα σίγουρα το παιχνίδι?

45. Σε ένα νησί ζουν δύο είδη ανθρώπων, αυτοί που λένε πάντα την αλήθεια και αυτοί που λένε πάντα ψέματα. Μόλις ρωτήσαμε πέντε από αυτούς, οι οποίοι ήξεραν ο ένας τον άλλον: Πόσοι από σας λένε την αλήθεια? Πήραμε τις ακόλουθες απαντήσεις: $0, 1, 2, 3, 4$. Πόσοι από αυτούς ήταν ψεύτες?

46. Σε ένα 3 επί 3 τετράγωνο τοποθετήστε τους αριθμούς $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ και 9 έτσι ώστε κάθε γραμμή, στήλη και διαγώνιος να έχει το ίδιο άθροισμα.

47. Μελετάμε την εξής παραλλαγή της τρίλιζας: Κάθε ένας από τους δύο παίκτες, οι οποίοι παίζουν και εδώ εναλλάξ, βάζει σε κάθε γύρο όποιο από τα δύο σύμβολα x ή o θέλει ανεξαρτήτως του τι έπαιξε στον προηγούμενο γύρο αυτός ή ο αντίπαλός του. Κερδίζει όποιος φτιάξει μια γραμμή, στήλη ή διαγώνιο με τρία ίδια σύμβολα, όπως και στο κλασικό παιχνίδι. Αποδείξτε ότι ο παίκτης που παίζει πρώτος έχει στρατηγική νίκης. Αποδείξτε δηλαδή ότι αν ο πρώτος παίξει τέλεια τότε κερδίζει πάντα ανεξάρτητα από τις κινήσεις του δεύτερου παίκτη.

Σημείωση: Αυτό το πρόβλημα είναι καθαρά μαθηματικό. Τα μαθηματικά είναι επιχειρήματα, ιδέες και συλλογισμοί. Όχι πράξεις και εξισώσεις. Οι πράξεις απλά βοηθάνε στο να αποδείξουμε προτάσεις και οι εξισώσεις στο να βρούμε αριθμούς με δεδομένες ιδιότητες.

48. Σε ένα 3 επί 3 τετράγωνο με αριθμούς έχουμε το δικαίωμα να κάνουμε τις εξής ενέργειες: Επιλέγουμε ένα από τα τέσσερα 2 επί 2 υποτετράγωνα και αυξάνουμε τους τέσσερις υπάρχοντες αριθμούς κατά 1 τον καθένα. Εξετάστε σε ποιά από τα παρακάτω είναι δυνατό να φτάσουμε αν ξεκινήσουμε από το

0	0	0
0	0	0
0	0	0

και κάνουμε τις επιτρεπτές ενέργειες.

5	9	4
9	18	9
4	9	5

4	9	5
11	24	11
7	13	6

4	10	5
9	20	11
5	10	6

11	18	7
16	32	16
5	14	9

Αν για κάποιο γίνεται, δείξτε τις κινήσεις. Αν δεν γίνεται, εξηγήστε το.

49.** Έχουμε μία παρέα 10 φίλων. Πόσες υποπαρέες από αυτούς τους φίλους υπάρχουν? Υποπαρέα θεωρείται και ένας φίλος μόνος του. Για παράδειγμα 3 φίλοι, οι Α, Β και Γ έχουν 7 υποπαρέες, τις Α, Β, Γ, ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ, ΑΒΓ. Γενικά ν φίλοι πόσες υποπαρέες έχουν?

Σημείωση: Το πρόβλημα αυτό ίσως σας φανεί πολύ δύσκολο. Αυτό το ερώτημα εισάγει έναν από τους κύριους κλάδους των μαθηματικών ο οποίος λέγεται

Συνδυαστική και δεν διδάσκεται στο σχολείο. Το καλό με αυτόν τον κλάδο είναι ότι δεν έχει προαπαιτούμενα. Από την άλλη τα ερωτήματά του ενώ μπορεί να είναι κατανοητά ακόμα και από μαθητές δημοτικού, γίνονται γρήγορα πολύ δύσκολα.

50. (Ο ΓΡΙΦΟΣ ΤΟΥ EINSTEIN) Υπάρχουν 5 σπίτια, 5 διαφορετικών ανθρώπων. Σε κάθε ένα σπίτι ζει ένας άνθρωπος διαφορετικής εθνικότητας. Οι 5 ιδιοκτήτες πίνουν ένα συγκεκριμένο είδος ποτού, καπνίζουν μια συγκεκριμένη μάρκα τσιγάρων και έχουν ένα συγκεκριμένο κατοικίδιο. Όλοι έχουν μεταξύ τους διαφορετικά κατοικίδια, διαφορετικές μάρκες τσιγάρων και διαφορετικά είδη ποτών. Η ερώτηση είναι ποιός έχει το ψάρι? Στοιχεία:
α) Ο Άγγλος μένει στο κόκκινο σπίτι.
β) Ο Σουηδός έχει ένα σκύλο.
γ) Ο Δανός πίνει τσάι.
δ) Το πράσινο σπίτι είναι αριστερά από το άσπρο σπίτι.
ε) Ο ιδιοκτήτης του πράσινου σπιτιού πίνει καφέ.
ζ) Αυτός που καπνίζει Pall Mall τσιγάρα έχει πουλιά για κατοικίδια.
η) Ο ιδιοκτήτης του κίτρινου σπιτιού καπνίζει Dunhill.
ϑ) Αυτός που μένει στο μεσαίο σπίτι πίνει γάλα.
ι) Ο Νορβηγός μένει στο πρώτο σπίτι.
κ) Αυτός που καπνίζει Blends μένει δίπλα σε αυτόν που έχει γάτες.
λ) Αυτός που έχει το άλογο μένει δίπλα σε αυτόν που καπνίζει Dunhill.
μ) Ο ιδιοκτήτης που καπνίζει Bluemasters πίνει μπίρα.
ν) Ο Γερμανός καπνίζει Prince.
ξ) Ο Νορβηγός μένει δίπλα στο μπλε σπίτι.
ο) Αυτός που καπνίζει Blends έχει ένα γείτονα που πίνει νερό.