

Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ηρακλείου
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΜΕ ΠΟΛΛΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ
Πέμπτη, 18 Απριλίου 2013

ΑΣΚΗΣΗ 1

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:

- $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και $f(1) = 2$.
- $2f(f(x)) = x^2 f(x)$, για κάθε $x > 0$.
- Η συνάρτηση $f(f(x))$ έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη την ευθεία $y = x$.

(i) Να βρείτε το $f(2)$.

(ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 στο $(0, +\infty)$.

(iii) Να λύσετε την εξίσωση $f(\lambda^3) = \frac{f(\lambda^2)}{\lambda^2}$ ως προς $\lambda > 0$.

(iv) Να λύσετε την εξίσωση $e^{f^2(\alpha)} + \ln f(\alpha) = e^{f(\alpha)}$ ως προς $\alpha > 0$.

(v) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ ώστε $f(x_0) = x_0$.

(vi) Να δείξετε ότι $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$.

(vii) Να βρείτε την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

(viii) Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με συνεχή παράγωγο στο $(0, +\infty)$:

(α) Να δείξετε ότι υπάρχει $c \in (1, 2)$, ώστε $f'(c) = -1$.

(β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

(γ) Να δείξετε ότι $f'(1) = -2$ και $f'(2) = -\frac{1}{2}$.

(δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(m) < 4m^{-2}$ ως προς $m > 0$.

(ε) Να δείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1, 2)$ με $x_1 < x_2$ ώστε: $f'(x_1)f'(x_2) = 1$.

(στ) Να δείξετε ότι $\int_1^2 x f^2(x) dx = 2 \int_1^2 f(x) dx$.

(ζ) Αν η f' είναι γνησίως μονότονη στο $(0, +\infty)$, να δείξετε ότι $f(x) + 2x \geq 4$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Έστω συνάρτηση $f : [0, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με $f(0) = 0$ και την ιδιότητα

$$2f(x) + f^2(x) = 2 \int_0^x e^{-f(t)} dt, \text{ για κάθε } x \geq 0.$$

- (i) Να δείξετε ότι $1 + f(x) \neq 0$, η f είναι γνησίως αύξουσα και ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.
- (ii) Να δείξετε ότι $f(x)e^{f(x)} = x$ για κάθε $x \geq 0$.
- (iii) Να δείξετε ότι $2f(x) > \ln x$ για κάθε $x > 0$.
- (iv) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ καθώς και το σύνολο τιμών της f .
- (v) Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $y = x$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο 0.
- (vi) Να δείξετε ότι η f στρέφει τα κοίλα κάτω και επιπλέον ισχύει $f(x) \leq x$ για κάθε $x \geq 0$.
- (vii) Αφού εξηγήσετε γιατί η f είναι αντιστρέψιμη, να βρείτε τον τύπο της $f^{-1}(x)$.
- (viii) Να κατασκευάσετε μία πρόχειρη γραφική παράσταση της f .
- (ix) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(e)$ και $f(e^{e+1})$.
- (x) Να βρείτε την τιμή του αθροίσματος $\int_0^e f(t)dt + \int_0^1 f^{-1}(t)dt$.
- (xi) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου $E(\lambda)$ που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη της στο 0 και την ευθεία $x = \lambda e^\lambda > 0$.
- (xii) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} E(\lambda)$.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f'(0) = 1$ και

$$f'(x) = \frac{2}{1 + e^{f(x)}}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- (i) Να μελετήσετε τη μονοτονία της f .
- (ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
- (iii) Να δείξετε ότι η f στρέφει τα κοίλα κάτω και ότι στην γραφική παράσταση της f δεν υπάρχουν τρία συνευθειακά σημεία.
- (iv) Να δείξετε ότι η $y = x$ είναι εφαπτομένη της f στο σημείο 0.
- (v) Να δείξετε ότι $f(x) \leq x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- (vi) Να δείξετε ότι $f(x) + e^{f(x)} = 2x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- (vii) Να δείξετε ότι $f(x) < 2x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- (viii) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- (ix) Να δείξετε ότι $f(x) > \ln(x + 1)$ για κάθε $x > -1$.
- (x) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- (xi) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- (xii) Να δείξετε ότι η f δεν έχει κατακόρυφες ασυμπτώτους.
- (xiii) Να βρείτε την ασύμπτωτη της f στο $-\infty$.
- (xiv) Να δείξετε ότι η f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.
- (xv) Να δείξετε ότι $f\left(\frac{e}{2}\right) = 1$.
- (xvi) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{e}{2}} f(t) dt$ χρησιμοποιώντας την συμμετρία των f, f^{-1} .

ΑΣΚΗΣΗ 4

Για την παραγωγίσιμη (\star) συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$f(x) + e^{f(x)} = x + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- (i) Να δείξετε ότι $e^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- (ii) Να δείξετε ότι $f(x) \leq \frac{x}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
- (iii) Να δείξετε ότι $f(x) > \ln\left(\frac{x+1}{2}\right)$ για κάθε $x > -1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- (iv) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .
- (v) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα.
- (vi) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- (vii) Να βρείτε το $f(0)$ και την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$.
- (viii) Να δείξετε ότι $xf'(x) \leq f(x)$ για κάθε $x \geq 0$.
- (ix) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.
- (x) Να βρείτε την f^{-1} και το $f(e)$.
- (xi) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x+\beta) - f(x+\alpha))$ και το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+\beta) - f(x+\alpha))$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\alpha < \beta$.
- (xii) Να βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^e f(x)dx$.
- (xiii) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της f^{-1} στο $-\infty$.
- (xiv) Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά την f^{-1} .
- (xv) Να κάνετε μία πρόχειρη γραφική παράσταση της f .

(\star)Σχόλιο: Μπορεί να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f που ικανοποιεί τη συναρτησιακή σχέση που δίνεται είναι συνεχής και παραγωγίσιμη χωρίς κάτι τέτοιο να χρειάζεται να δοθεί στην εκφώνηση του θέματος. Ωστόσο επειδή η απόδειξη αυτή ξεφεύγει από τους στόχους της παρούσας άσκησης, η παραγωγισιμότητα της f δίνεται ως δεδομένο. Σχετικά μπορείτε να κοιτάξετε τις σελίδες 71 έως 73 στο συνημμένο αρχείο του Νίκου Μαυρογιάννη στον παρακάτω σύνδεσμο:

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=29446>