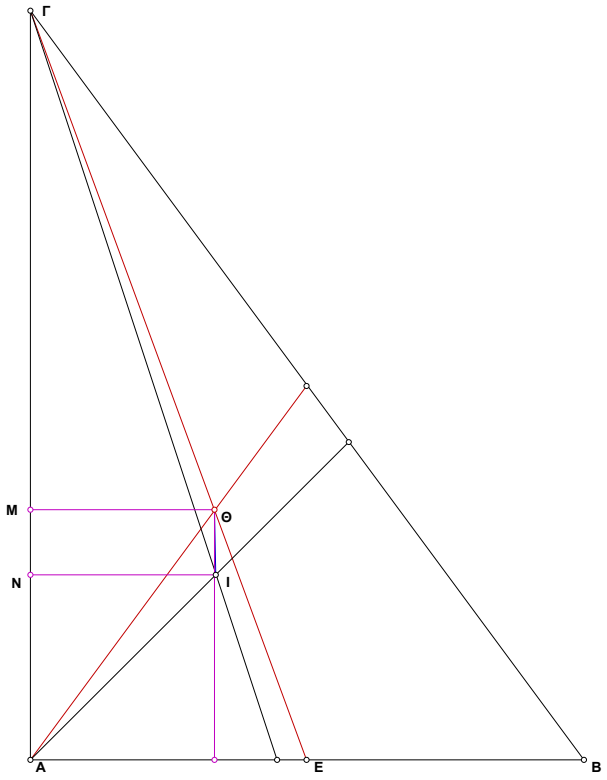
Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α=90), στο οποίο η ευθεία που ορίζεται από το έκκεντρο Ι και το βαρύκεντρο G αυτού είναι παράλληλη προς την ευθεία ΑΓ. Να βρεθούν οι πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ,σε συνάρτηση με το εμβαδό Ε του ΑΒΓ.

Κυριαζής Χρήστος



Έστω Θ το βαρύκεντρο και Ι το έκκεντρο του ΑΒΓ, με ΘΙ // ΑΓ.
Φέρνουμε ΘΜ ⊥ΑΓ και ΙΝ⊥ΑΓ. Οπότε ΘΜ =ΙΝ =ρ (ακτίνα εγγεγρ. κύκλου του ΑΒΓ).

Έστω ΓΕ διάμεσος στην ΑΒ. Επειδή ΘΕ = $\frac{1}{3}$ΓΕ , θα είναι ΑΜ = $\frac{\beta}{3}$.

Είναι $A\Theta = \frac{2}{3}\mu_\alpha = \frac{\alpha}{3}$, οπότε στο ορθογώνιο ΑΜΘ είναι: $\rho^2 = \left(\frac{\alpha}{3}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{3}\right)^2 = \left(\frac{\gamma}{3}\right)^2$, οπότε $\boldsymbol{\rho = \frac{\gamma}{3}}$ (1)

Είναι: $E = \tau\cdot\rho$ άρα $\frac{\beta\gamma}{2} = \tau\cdot\frac{\gamma}{3} \Leftrightarrow \beta = \frac{2\tau}{3} \Leftrightarrow \beta = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} \Leftrightarrow \beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}$ (2)

Επίσης, $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 = (\alpha+\gamma)(\alpha-\gamma) \underset{(2)}{=} 2\beta(\alpha-\gamma) \Leftrightarrow \beta = 2(\alpha-\gamma)$ (3)

Από (2) και (3) έχουμε: $\alpha = \frac{5}{3}\gamma$ και $\beta = \frac{4}{3}\gamma$, άρα $\tau = \frac{\frac{5}{3}\gamma + \frac{4}{3}\gamma + \gamma}{2} = 2\gamma$

Τότε: $E = \tau\cdot\rho$ άρα $E = 2\gamma\cdot\frac{\gamma}{3} \Leftrightarrow \gamma^2 = \frac{3}{2}E \Rightarrow \gamma = \sqrt{\frac{3}{2}E}$ και $\beta = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{2}E}$, $\alpha = \frac{5}{3}\sqrt{\frac{3}{2}E}$

Γιώργος Ρίζος