

ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ ΓΙΑ ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ :
ΟΙ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Δημήτρης Μπουνάκης

Σχ. Σύμβουλος Μαθηματικών

dimitrmp@sch.gr

Οκτώβριος 2009

Συνάδελφοι,

Τα έγγραφο αυτό περιέχει σε ολοκληρωμένη μορφή την ομιλία μου με τίτλο «Οι ερωτήσεις στη Διδασκαλία των Μαθηματικών», που έγινε στα πλαίσια της ημερίδας «Διδακτικής Μαθηματικών και Παιδαγωγικών» που πραγματοποιήθηκε στις 15 Οκτωβρίου 2009 στο Ηράκλειο. Δυο ακόμη από τις ομιλίες που έγιναν στην ημερίδα αυτή θα σας σταλούν μόλις καθαρογραφούν. Στόχος της ομιλίας μου ήταν η ευαισθητοποίηση του καθηγητή στο σημαντικό θέμα των ερωτήσεων που υποβάλλονται κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας στη τάξη και η παροχή χρήσιμων στοιχείων σχετικά με την σύνταξη και διατύπωση των ερωτήσεων. Με χαρά θα δεχθώ για συζήτηση διορθώσεις ή συμπληρώσεις στο σημαντικό αυτό θέμα που καθημερινά μας απασχολεί.

Συνοπτικά το θέμα κινείται γύρω από τους εξής άξονες:

- ❖ Ο ρόλος των ερωτήσεων στη διαδικασία «διδασκαλία –μάθηση
- ❖ Είδη ερωτήσεων, χαρακτηριστικά καλών ερωτήσεων
- ❖ Οι Ερωτήσεις του Καθηγητή
- ❖ Οι Απαντήσεις του Καθηγητή

1. Ο ΡΟΛΟΣ ΤΩΝ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ

Είναι φανερό ότι η ερώτηση αποτελεί ένα ιδιαίτερα σημαντικό μέρος του γραπτού και του προφορικού λόγου και συμβάλει στην καλύτερη επικοινωνία και προπάντων την κατανόηση και συνεννόηση των ανθρώπων.

Πολύ σπουδαιότερος είναι ο ρόλος των ερωτήσεων κατά την διάρκεια της διαδικασίας «διδασκαλία – μάθηση», αφού σ' αυτή την περίπτωση, δεν πρόκειται για μια απλή επικοινωνία, αλλά για μια ανώτερη πνευματική εργασία και προσπάθεια με σκοπό την κατάκτηση νέων γνώσεων και δεξιοτήτων και όχι μόνο.

Γενικά στην διαδικασία διδασκαλία- μάθηση, οι ερωτήσεις χρησιμοποιούνται σε δυο φάσεις: στον έλεγχο των γνώσεων ή την αξιολόγηση του μαθητή και στην διδασκαλία. Εδώ θα ασχοληθούμε μόνο με τις ερωτήσεις στη δεύτερη φάση.

Στη φάση της διδασκαλίας οι ερωτήσεις (ή ερωτήσεις - υποδείξεις) γίνονται στην τάξη, κυρίως από τον καθηγητή, για να βοηθήσουν τους μαθητές στην κατάκτηση των στόχων του μαθήματος. Φυσικά κατά την διδασκαλία γίνονται προς τους μαθητές όχι μόνο ερωτήσεις, αλλά και παροτρύνσεις, προτροπές, νύξεις που και αυτές μπορούμε να τις εντάξουμε στο γενικό πνεύμα των ερωτήσεων-ερεθισμάτων. Ο προτρεπτικός ρόλος των ερωτήσεων προς τη μάθηση μπορεί να πάρει διάφορες μορφές, οι οποίες συχνά δεν είναι άμεσα ορατές, όπως:

- **Να παρακινήσουν σε ένα νέο αντικείμενο διδασκαλίας**
π.χ. «πώς θα βρούμε μια σχέση μεταξύ της διαμέσου μα τριγώνου και των πλευρών του;»
- **Να παρακινήσουν την συνεργασία ή αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών:**
π.χ. «ο τρόπος λύσης της Μαρίας είναι καλύτερος από του Κώστα;»
- **Να προκαλέσουν, π.χ.**
«Οι διαγώνιες ορθογωνίου φαίνονται ίσες, μπορείτε να το αποδείξετε;»
- **Να βοηθήσουν στη κατανόηση των μεθόδων, π.χ.**
«Ποια μέθοδο (ή τρόπο) χρησιμοποιήσαμε για να λύσουμε αυτό το πρόβλημα;»
- **Να βοηθήσουν τους μαθητές να αξιολογούν: π.χ.**
«Νομίζεις ότι η μεθοδός σου είναι κατάλληλη και για άλλους είδους πρόβλημα»
- **Να ενθαρρύνουν τη διάθεση για εξερεύνηση: π.χ.**
«Αν δυο τρίγωνα έχουν δυο πλευρές ίσες μια προς μια και μια γωνία ίση είναι ίσα;» ή «το περίκεντρο τριγώνου βρίσκεται πάντα στο εσωτερικό του;»
- **Να ενθαρρύνουν ερωτήσεις από τους ίδιους τους μαθητές: π.χ.**
«Αυτό το θεώρημα ποιες ερωτήσεις σας δημιουργεί» π.χ. Πυθαγόρειο (αντίστροφο, μη ορθογώνιο κλπ), Θ. Bolzano (αντίστροφο, αρκεί η εποπτική απόδειξη κλπ).
- **Να κάνουν διάγνωση: π.χ.**
«Πώς το βρήκες αυτό Γιάννη;»
- **Να αυξήσουν την ικανότητα μεταφοράς της γνώσης: π.χ.**
«Πώς θα μπορούσατε να χρησιμοποιήσετε το εμβαδόν τριγώνου για να υπολογίσετε το εμβαδόν τραπέζιου;»

II. ΕΙΔΗ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ

Με κριτήριο τον βαθμό ενεργοποίησης της σκέψης που χρειάζεται για να μελετηθεί και να απαντηθεί μια ερώτηση, διακρίνουμε δυο βασικές κατηγορίες ερωτήσεων.

1. Ερωτήσεις απομνημόνευσης

Είναι ερωτήσεις στις οποίες οι μαθητές για να απαντήσουν πρέπει να ανακαλέσουν απλά από τη μνήμη διάφορες γνώσεις ή δεξιότητες. Στην κατηγορία αυτή μπορούν να ενταχθούν και οι λεγόμενες «συγκλίνουσες» ερωτήσεις οι οποίες οδηγούν την σκέψη των ερωτώμενων σε στενά πλαίσια. Οι ερωτήσεις της κατηγορίας αυτής είναι συνήθως του τύπου «πότε;», «τι;» «πως;», «ποια είναι η τιμή της παράστασης...», «λύσετε την εξίσωση...» κλπ.

Παραδείγματα:

- Πότε ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές;
- Τι κάνουμε για να λύσουμε μια εξίσωση α' βαθμού;
- Να λύσετε τη εξίσωση $5x + 2 = 2(x - 1)$
- Πως απαλείφουμε τους παρανομαστές μιας εξίσωσης;
- Πότε η δευτεροβάθμια εξίσωση έχει ρίζες ίσες;
- Να βρείτε τον μιγαδικό $\omega = i^{2009}$.
- Πότε μια συνάρτηση $f(t)$ λέμε ότι παραγωγίζεται σ' ένα σημείο ξ ;

2. Ερωτήσεις σκέψης - κρίσης,

Με τις ερωτήσεις αυτές ζητούνται από τους μαθητές νοητικές δεξιότητες, λογικά συμπεράσματα, επινόηση κ.λ.π., δηλαδή η απάντησή τους είναι αποτέλεσμα σκέψης ή/και προβληματισμού σε διάφορα επίπεδα. Στην κατηγορία αυτή μπορούν να ενταχθούν, ως ερωτήσεις ανωτέρου επιπέδου, και οι «αποκλίνουσες» ή ανοικτές ερωτήσεις με ανοικτό ορίζοντα αναζήτησης, που αποτελούν ερέθισμα και παρότρυνση για ελεύθερη σκέψη και αυτενεργό δημιουργία. Συνήθως είναι του τύπου «γιατί;», «πως;», «τι νομίζετε;», «για ποιο λόγο;», «να εξετάσετε...», «το ζητούμενο σας φέρνει στη σκέψη κάποια γνωστή πρόταση;». Οι ερωτήσεις της κατηγορίας αυτής είναι περισσότερο διδακτικές και είναι καλό να μην απουσιάζουν από μια διδασκαλία.

Παραδείγματα:

- Αν δυο ποσά δεν είναι αντιστρόφως ανάλογα, τότε είναι ανάλογα; (εξηγείστε, δώστε (αντι)παράδειγμα)
- Να υπολογίσετε τον αριθμό $a = (-5)^{2009} (0,2)^{2009}$.
- Γιατί το ορθόκентρο ενός αμβλυγωνίου τριγώνου βρίσκεται εκτός του τριγώνου;
- Για ποιο λόγο ένα τετράγωνο έχει κάθετες τις διαγώνιες;

- (ανοικτή ερώτηση) Ο καθηγητής παίρνοντας αφορμή από μια λανθασμένη πράξη π.χ. $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{6}{8}$ ρωτά: σε ποια περίπτωση ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$;
- Πως συνδέονται οι μιγαδικοί z, w όταν οι εικόνες τους είναι σημεία συνευθειακά με την αρχή του μιγαδικού επιπέδου;
- Αν ισχύει $\varphi(x) \leq 2009$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση φ έχει μέγιστο;
- Ένα σημείο καμπής μιας συνάρτησης φ , είναι ακρότατο για την φ' ; Με κάποια προϋπόθεση ίσως;
- Μπορεί ένα σημείο καμπής, μιας διπλά παραγωγίσιμης συνάρτησης, να είναι τοπ. ακρότατο;

Στην διδασκαλία ο καθηγητής πρέπει να απευθύνει προς τους μαθητές ερωτήσεις και από τα δυο είδη, με προτίμηση στις ερωτήσεις κρίσεως. Οι ερωτήσεις κρίσεως απαιτούν από τον καθηγητή συνήθως περισσότερη δουλειά κατά τον σχεδιασμό του μαθήματος, αλλά ο διδακτικός τους ρόλος είναι σπουδαίος και αναντικατάστατος.

III. ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΩΝ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ

Κύρια χαρακτηριστικά των καλών διδακτικών ερωτήσεων, εκτός από την λογική ή/και επιστημονική εγκυρότητα που θεωρείται αυτονόητη, είναι *η σαφήνεια, το ενδιαφέρον, η γενικότητα, η φυσικότητα και να έχουν συγκεκριμένο στόχο.*

1. Σαφήνεια - Ενδιαφέρον

Οι ερωτήσεις πρέπει να 'ναι σαφείς, σύντομες και χωρίς επιστημονικές αμφισβητήσεις. Να είναι διατυπωμένες απλά με λέξεις κατανοητές στους μαθητές, με καλή γλωσσική διατύπωση και να προκαλούν όσο είναι δυνατόν το ενδιαφέρον των μαθητών (όχι τετριμμένες ή ανιαρές ή αρκετά δύσκολες).

Επίσης να 'ναι ανάλογες με τις γνώσεις και το πνευματικό επίπεδο των μαθητών, ώστε να γίνουν κατανοητές και να μπορούν να απαντηθούν από αυτούς. Ένα λάθος που κάνουμε συχνά, είναι να θεωρούμε δεδομένο και κατανοητό και για τους μαθητές το «δικό μας μαθηματικό λεξιλόγιο» που και κόπο και χρόνο χρειαστήκαμε για να μπορούμε να το χειριζόμαστε με άνεση.

Εδώ χρειάζεται προσοχή, ιδίως στις νέες έννοιες που συναντούμε στα μαθήματα: οι μαθητές μας *διδάσκονται μαθηματικά για πρώτη φορά στη ζωή τους* και δεν είναι ίδιοι με αυτούς με διδάξαμε τα προηγούμενα χρόνια (ενώ βρίσκονται στο ίδιο περίπου πνευματικό επίπεδο). Έτσι για παράδειγμα, αν ρωτήσουμε τους μαθητές στις πρώτες τάξεις του Γυμνασίου - ίσως και στην Α΄ Λυκείου- *«να συγκρίνετε τα κλάσματα... (ή τα τρίγωνα...)*»- κάτι προφανές για μας - πολλοί μαθητές ίσως να μην καταλάβουν τι ακριβώς τους ζητείται (αν δεν έχει γίνει κατανοητή η έννοια του ρήματος «συγκρίνω» στα συγκεκριμένα μαθηματικά αντικείμενα) με όλες τις συνέπειες.

Παραδείγματα ασαφών ερωτήσεων:

1. Να εκτελέσετε τις πράξεις $(2x - 1)^2 + (x - 1)^2 + 2(1 - x)(2x - 1)$

Καλύτερα:

- Να φέρετε την παράσταση $\Pi = (2x-1)^2 + (x-1)^2 + 2(1-x)(2x-1)$ σε μορφή πολυωνύμου διατεταγμένου κατά τις φθίνουσες δυνάμεις της μεταβλητής του, ή
- Να εκτελέσετε όλες τις (αλγεβρικές) πράξεις απλοποιώντας όσο είναι δυνατόν την παράσταση $\Pi = (2x-1)^2 + (x-1)^2 + 2(1-x)(2x-1)$ ή (ακόμη καλύτερα, από άποψη σαφήνειας αλλά και ενδιαφέροντος)
- Να αποδείξετε ότι $(2x - 1)^2 + (x - 1)^2 + 2(1 - x)(2x - 1) = x^2$.

2. Να συμπληρώσετε την ισότητα $a^3 + 3a\beta^2 + 3a^2\beta + \beta^3 =$

Καλύτερα:

- Να συμπληρώσετε την ισότητα $a^3 + 3a\dots + 3a^2\dots + \beta^3 = (a + \dots)^3$, ή
- Να γράψετε το ανάπτυγμα της παράστασης $(a + \beta)^3$, ή
- Να γράψετε την παράσταση $a^3 + 3a\beta^2 + 3a^2\beta + \beta^3$ με την μορφή μιας δύναμης.

3. Αν $a \leq 0$ τότε $|a| \leq 0$ Σ - Λ ;

Εδώ δεν έχουμε μια πρόταση, αλλά πολλές (προτασιακός τύπος). Για $a = 0$ είναι αληθής ενώ για $a < 0$ ψευδής. Μπορεί να δοθεί διαφορετικά:

- Για κάθε $a \leq 0$ ισχύει $|a| \leq 0$, Σ- Λ (Λ), ή
- Υπάρχει $a \leq 0$ με $|a| \leq 0$, Σ- Λ (Σ)

4. Αν $\Pi = \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 1}$ με $|x| < 1$ να βρείτε την παράσταση Π .

Καλύτερα:

- Να αποδείξετε ότι, αν $|x| < 1$ τότε $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 1} = 2$, ή
- Να απλοποιήσετε όσο είναι δυνατόν την παράσταση $\Pi = \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 1}$, όταν $|x| < 1$, ή
- Να δείξετε ότι η παράσταση $\Pi = \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 1}$ είναι ανεξάρτητη του x (ή σταθερή).

2. Γενικότητα

Με δεδομένο το ενδιαφέρον για μάθηση, οι γενικές ερωτήσεις είναι ερεθίσματα για δραστηριοποίηση των διανοητικών δυνάμεων του μαθητή και επιτρέπουν μεγάλα περιθώρια αυτενέργειας. Μετά τις γενικές ερωτήσεις και ανάλογα με την πρόοδο των μαθητών, μπορούν να γίνουν βαθμιαία λιγότερο γενικές - ειδικές ερωτήσεις μέχρι να υπάρξει ανταπόκριση στο νου των μαθητών. Πάντως πρέπει αποφεύγουμε, όσο το επιτρέπει ο χρόνος, να δίνουμε απάντηση σε ερώτηση που μπορεί να δοθεί από τους μαθητές.

Ας δούμε ένα παράδειγμα: Οι μαθητές (Γ΄ Γυμνασίου ή Α΄ Λυκείου-Γεωμετρία) εργάζονται να αποδείξουν - σε άσκηση ή θεώρημα - ότι δυο ευθύγραμμα τμήματα π.χ. AB , $ΚΛ$ είναι ίσα. Ο Καθηγητής τους δίνει από την αρχή την ερώτηση-υπόδειξη:

- **«εξετάσετε αν είναι ίσα τα τρίγωνα... $ΚΑΜ$, $ΑΒΔ$ »**,

Σ' αυτό το είδος της βοήθειας (όπως λέει και ο G.Polya), υπάρχουν ορισμένες αντιρρήσεις:

α. Αν η ερώτηση-υπόδειξη γίνει κατανοητή, αφ' ενός λίγη δουλειά μένει στο μαθητή, αφ' ετέρου την βλέπει σαν «αφύσικη ταχυδακτυλουργία»- δύσκολα θα καταλάβει πως ήλθε η ιδέα στον καθηγητή.

β. Η υπόδειξη είναι πολύ ειδική και έτσι, αν ακόμη ο μαθητής μπορέσει να την χρησιμοποιήσει για την συγκεκριμένη άσκηση, τίποτα δεν θα μάθει για μελλοντικά προβλήματα.

γ. Αν ο μαθητής δεν αντιληφθεί που οδηγεί η ερώτηση, δεν βοηθά εκεί, που η βοήθεια είναι πολύ αναγκαία και μπορούσε να δοθεί με μια γενική ερώτηση:

- «γνωρίζετε κανένα θεώρημα ή άσκηση με παρόμοιο συμπέρασμα;» ή, αν δεν προχωρήσουν,
- «μπορείτε να χρησιμοποιήσετε δυο ίσα τρίγωνα;».

Πάντως και οι ειδικές ερωτήσεις μπορούν να χρησιμοποιούνται στην διδασκαλία, αφού πρώτα γίνουν γενικές ερωτήσεις και δεν υπάρξει ανταπόκριση από τους μαθητές ή όταν δεν υπάρχει αρκετός χρόνος.

3. Φυσικότητα - Στόχος

Χαρακτηρίζουν την ερώτηση-υπόδειξη που γίνεται την κατάλληλη χρονική στιγμή, δηλαδή όταν ο μαθητής χρειάζεται κάποια βοήθεια για να προχωρήσει την εργασία του και υπηρετούν τον στόχο της ενεργοποίησης της σκέψης του μαθητή.

Σε διαφορετική περίπτωση, ίσως η ερώτηση περάσει απαρατήρητη. Έτσι π.χ., αν ο μαθητής (γνωρίζοντας το ζητούμενο σε ένα πρόβλημα) έχει προχωρήσει και κάτι χρειάζεται ακόμη, είναι σκόπιμο να του δοθεί και η ερώτηση-υπόδειξη:

Χρησιμοποίησες όλα τα δεδομένα; Ή, ποια είναι τα δεδομένα; Ή, ποια είναι η υπόθεση;

Τα χαρακτηριστικά αυτά τα έχουν όλες οι ερωτήσεις-υποδείξεις του καταλόγου του βιβλίου «Πώς να το λύσω» του G. Polya που παρουσιάσαμε πέρυσι (βλ. Διδακτικό Υλικό Λυκείου με αρ. πρ. 426, 24-11-2008. (Οι ερωτήσεις αυτές είναι αρκετά χρήσιμο να δίνονται στην αρχή κάθε χρόνου στους μαθητές από την Γ΄ Γυμνασίου και προπάντων να γίνεται αναφορά σ' αυτές όταν χρησιμοποιούνται στην τάξη ώστε να γίνουν συνήθεια).

IV. Ο ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΕΡΩΤΑ...

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΕΙΣ

Οι ερωτήσεις - υποδείξεις του καθηγητή είναι συνάρτηση των γνώσεων του, της εμπειρίας, της προσωπικότητάς του, των στόχων του μαθήματος αλλά και της διάθεσης και του ενθουσιασμού του για διδασκαλία των Μαθηματικών. Έτσι δεν υπάρχει μια ορισμένη τεχνική για σύνταξη καλών ερωτήσεων, υπάρχουν όμως ορισμένες αρχές, οι οποίες από την παιδαγωγική ψυχολογία, τη διδακτική των Μαθηματικών αλλά και την εμπειρία θεωρούνται χρήσιμες για μια αποτελεσματικότερη διδασκαλία.

1. Οι ερωτήσεις πρέπει να απευθύνονται σ' όλους τους μαθητές της τάξης.

Με τον τρόπο αυτό θα υπάρχει για όλους ερέθισμα για κινητοποίηση της σκέψης. Μετά αναφέρουμε το όνομα του μαθητή που θέλει να απαντήσει, αλλά πρέπει να δίνουμε το λόγο και να παρακινούμε να απαντήσουν και οι *μαθητές που δεν σηκώνουν συχνά το χέρι τους*. Ειδικά από τους αδύνατους ή αποθαρρυσμένους μαθητές, καλό είναι να ζητούμε απαντήσεις σε ευκολότερες ερωτήσεις (αλλά να μην γίνεται αυτό πάντα). Αυτό σε συνδυασμό με άλλα μέτρα (λεκτικές επιβραβεύσεις, βαθμολογία), είναι δυνατόν να οδηγήσει σε ενθάρρυνση και τόνωση της αυτοπεποίθησης των μαθητών αυτών, ώστε να μην μένουν στο «περιθώριο του μαθήματος» με όλες τις αρνητικές συνέπειες. Επίσης είναι προτιμότερο να προηγείται της ερώτησης η έκφραση «ποιος θα μας πει» ή «για να δούμε ποιος θα μας πει» και όχι «ποιος θα μου πει»...

2. Άνεση χρόνου.

Ανάλογα με την δυσκολία της ερώτησης, πρέπει να *μεσολαβεί ένα χρονικό διάστημα* μέχρι την απάντηση, για να «πάθουν» και να σκεφτούν όλοι οι μαθητές της τάξης. Διαφορετικά είναι πολύ πιθανό οι μαθητές να απαντούν στην τύχη ή να απαντούν σε άλλη ερώτηση ή να δίνουν απάντηση πολύ συχνά οι λίγοι καλοί μαθητές της τάξης.

3. Να αποφεύγονται οι συνεχόμενες ερωτήσεις.

Έτσι θα υπάρχει άνεση για σκέψη και εργασία του μαθητή. Το φαινόμενο των συνεχόμενων ερωτήσεων, στην οξεία του μορφή, γνωστό και σαν «*βροχή ερωτήσεων*» το συναντούμε συνήθως στην καθαυτό ερωτηματική μορφή διδασκαλίας, η οποία πρέπει γενικά να αποφεύγεται, αφού ο μαθητής παρακολουθεί,

κυριολεκτικά «σέρνεται» από την σκέψη του δασκάλου και δεν σκέπτεται αυτοδύναμα και επομένως δεν μπορεί να αναπτύξει δική του σκέψη και πορεία μάθησης. Συνήθως στην μορφή αυτή διδασκαλίας, για να «κερδηθεί χρόνος», ο καθηγητής *δίνει σχεδόν αμέσως και την απάντηση*, κάτι παιδαγωγικά και διδακτικά απαράδεκτο όταν γίνεται κατά σύστημα.

Πάντως από τον συνεχή μονόλογο «προτιμότερη» είναι η διδασκαλία αυτή, έστω και αν οι μαθητές δεν απαντούν ή οι ερωτήσεις τίθενται για να απαντώνται από τον καθηγητή, χάριν της προόδου και του «ζωηρέματος» του μαθήματος. Οι μορφές αυτές διδασκαλίας είναι πια καιρός να τεθούν γενικά στο περιθώριο, και να αντικατασταθούν από την καθοδηγούμενη αυτενέργεια ή στην ομαδοσυνεργατική μορφή διδασκαλίας.

ΤΙ ΑΛΛΟ ΝΑ ΑΠΟΦΕΥΓΟΥΜΕ

4. Να αποφεύγουμε 5 ερωτήσεις όπως: «το καταλάβατε;», όπως και την ερώτηση «έχει κανείς να ρωτήσει κάτι», ιδίως όταν δεν υπάρχει αρκετός χρόνος.

Η εμπειρία δείχνει ότι οι ωραίες αυτές ερωτήσεις, στην πράξη δεν προσφέρουν τίποτα και δίνουν ψευδείς εντυπώσεις στο δάσκαλο. Συνήθως, όλοι μαζί οι μαθητές απαντούν «ναι...» ή σπάνια ερωτά κάποιος μαθητής, ακόμη και αν δεν έχει γίνει κατανοητό μέρος ή όλο το μάθημα. Πάντως πρέπει να ενθαρρύνουμε τους μαθητές να διατυπώνουν τις απορίες ή ερωτήσεις τους είτε μέσα στη τάξη είτε στο διάλειμμα. Ο καλύτερος τρόπος για να διαπιστώσουμε αν έχει γίνει κατανοητό το μάθημα, μερικά ή ολικά, είναι να δώσουμε μερικές -προτιμότερο γραπτές - ερωτήσεις κατανόησης ή απλές ασκήσεις στο τέλος του μαθήματος. Φυσικά μια πιο έγκυρη αξιολόγηση μπορεί να γίνει με ένα τεστ ή διαγώνισμα.

5. Να μην θέτουμε ερωτηματικές αντωνυμίες στο τέλος των ερωτήσεων, όπως π.χ. «και μετά κάνομε τι;» αλλά στην αρχή.

Τέτοιες ερωτήσεις, όταν μάλιστα επαναλαμβάνονται συχνά, δημιουργούν νευρική κατάσταση, εκτός του ότι ηχούν άσχημα.

6. Να αποφεύγονται οι ερωτήσεις που χρειάζονται μονολεκτική απάντηση, οι «ψευδοερωτήσεις» καθώς και οι διαζευκτικές ερωτήσεις.

Οι μαθητές συνήθως στις ερωτήσεις αυτές απαντούν με πιθανότητα, χωρίς να σκεφτούν.

7. Να χρησιμοποιούνται όσο είναι δυνατόν, ρήματα που φανερώνουν συγκεκριμένες ενέργειες ή πράξεις.

Ειδικά, καλό είναι να χρησιμοποιούνται όσο το δυνατόν λιγότερο τα αόριστα και με πολλές έννοιες ρήματα «πρέπει», «έχουμε», «κάνουμε», και όταν τα χρησιμοποιούμε να διευκρινίζουμε περισσότερο τη σημασία τους, όπως π.χ.

Τι πρέπει να κάνουμε τώρα; (να βγάλουμε τις παρενθέσεις ή να κάνουμε τις πράξεις ή να βρούμε την τιμή της παράστασης... κ.ά).

Ειδικά με το «πρέπει», που με τόση ευκολία βγαίνει από τα χείλη των μαθητών -και όχι μόνο - απαιτείται προσοχή και φειδώ στη χρήση του, επειδή το «μαθηματικό πρέπει» εκφράζει (μόνο) αναγκαία συνθήκη (να το διασαφηνίζουμε και να το τονίζουμε αυτό) και οι μαθητές την *εκλαμβάνουν συχνά* και ως ικανή. π.χ.

- Για να είναι οι γωνίες ω και φ παραπληρωματικές πρέπει να είναι ορθές.
- Για να είναι η συνάρτηση φ γν. αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ πρέπει $\varphi'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

8. Οι ερωτήσεις δεν πρέπει να περιέχουν την απάντηση.

Πολλές φορές με πρόθεση λίγο ή πολύ να βοηθήσουμε τους μαθητές, κάνουμε ερωτήσεις που περιέχουν μερικά την απάντηση (ή ακόμη χειρότερα δίνουμε την απάντηση πριν καν σκεφτούν οι μαθητές...).

Αυτό συμβαίνει π.χ. όταν γίνονται ειδικές ερωτήσεις (με μπόλικη βοήθεια). Χωρίς να αποκλείουμε και αυτές τις ερωτήσεις, η συστηματική χρήση τους δεν βοηθά την μάθηση και προπάντων την πνευματική εξέλιξη του μαθητή. Όσες λιγότερες τέτοιου είδους ερωτήσεις γίνονται κατά την διδασκαλία, τόσο το καλύτερο.

Παραδείγματα:

- ❖ Τι είδους γωνίες είναι οι γωνίες ενός οξυγωνίου τριγώνου;
- ❖ Πως λέγεται μια εξίσωση που δεν έχει λύση;
- ❖ Ποια γινόμενα πρέπει να είναι ίσα ώστε να ισχύει η ισότητα $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$;

9. Να αποφεύγονται τέλος απαξιωτικές ή επιτιμητικές εκφράσεις για οποιοδήποτε μαθητή που δεν απαντά ή απαντά λάθος. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε την ερώτηση, ή να πούμε στο μαθητή να το ξανασκεφτεί, ή να προσπαθήσει κι άλλο (και ερευνούμε για ποιο λόγο απάντησε λάθος - μήπως κάτι στη διδασκαλία μας δεν πήγε καλά- ή μήπως απάντησε σε άλλη ερώτηση κλπ. Αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό για την διδακτική ανατροφοδότηση και βελτίωση του καθηγητή))

Επισημαίνουμε ακόμη την αντιστοιχία που πρέπει να υπάρχει μεταξύ των ερωτήσεων αξιολόγησης και των ερωτήσεων οι οποίες γίνονται κατά στην διδασκαλία και με τις οποίες «εκπαιδεύονται και εθίζονται» οι μαθητές: αν στην διδασκαλία μας π.χ. κυριαρχούν οι ερωτήσεις απομνημόνευσης αντίστοιχες ερωτήσεις πρέπει να κυριαρχούν και στις ερωτήσεις αξιολόγησης κλπ.

V. Ο ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΑΠΑΝΤΑ...**ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΕΙΣ**

Γενικά ο καθηγητής στις απαντήσεις του πρέπει να αποφεύγει :

- ❖ Να απαντά σε ερώτηση, όταν η απάντηση μπορεί να δοθεί από τους μαθητές (ίσως και με λίγη βοήθεια)
- ❖ Να απαντά σε ερωτήσεις εκτός θέματος ή που απομακρύνουν από το θέμα. Μπορεί όμως καλέσει τον μαθητή στο διάλειμμα για συζήτηση.
- ❖ Να απαντά βιαστικά πριν ολοκληρωθεί η απάντηση του μαθητή.
- ❖ Να απαντά όταν δεν είναι σίγουρος για την απάντησή του. Πρέπει να έχει το θάρρος να πει «δεν ξέρω την απάντηση!, Θα σας απαντήσω στο επόμενο μάθημα» (αλλά να μην ξεχάσει να απαντήσει!..)
- ❖ Να απαντά στις... ερωτήσεις του...

Αν δεν απαντά κανείς μαθητής, περιμένουμε λίγο περισσότερο ή επαναδιατυπώνουμε την ερώτηση, δίνοντας μεγαλύτερη βοήθεια... (πιο ειδική ερώτηση)

- ❖ Να επαναλαμβάνει τις ερωτήσεις του...
Οι μαθητές εθίζονται και δεν προσέχουν τις ερωτήσεις.
- ❖ Να διακόπτει την απάντηση του μαθητή.

Επίσης πρέπει η απάντησή μας - σε οποιαδήποτε ερώτηση μαθητή - να γίνεται σε ήρεμο τόνο και να μην συνοδεύεται ποτέ από οποιοδήποτε απαξιωτικό ή επιτιμητικό χαρακτηρισμό ή αλαζονικό ύφος. Ακόμη και μια «παιδαριώδη» ή «γελοία» ερώτηση - αν δεν γίνεται σκόπιμα και αυτό το καταλαβαίνουμε - για τον καθηγητή έχει την αξία της και μπορεί να του δώσει χρήσιμα στοιχεία για τη πορεία μάθησης του μαθητή.

Να ενθαρρύνουμε τους μαθητές να κάνουν ερωτήσεις

Η διατύπωση οποιωνδήποτε σχετικών με το μάθημα ερωτήσεων και αποριών από τους μαθητές συμβάλλει στην ουσιαστική μάθηση και πρέπει να ενθαρρύνουμε τους μαθητές να τις κάνουν τόσο προς εμάς όσο και προς τους άλλους συμμαθητές τους. Ειδικά όμως τις «καλές» ερωτήσεις - πάντα βέβαια στα μαθητικά πλαίσια - πρέπει και να τις επαινούμε - π.χ. καλή ερώτηση! Παραφράζοντας γνωστό απόφθεγμα μπορούμε να πούμε ότι

«Μια καλή ερώτηση αξίζει όσο χίλιες απαντήσεις»

Επίσης καλό είναι να ζητούμε από την τάξη να αξιολογήσει μια απάντηση ενός μαθητή, αντί να το κάνουμε εμείς. Εθίζουμε έτσι τους μαθητές μας στην αξιολόγηση απόψεων και επιχειρημάτων, αλλά και ο μαθητής έρχεται θετικά στο επίκεντρο της

τάξης, κάτι που τον ενθαρρύνει και συμβάλλει στην τόνωση της αυτοπεποίθησής του.

Είναι συχνό το φαινόμενο να περνούν μεγάλα χρονικά διαστήματα όπου οι μαθητές δεν κάνουν καμία, έστω διευκρινιστική, ερώτηση. Αυτό είναι ένα σημάδι που πρέπει να μας ανησυχεί και καλό είναι να ψάξουμε τα αίτιά του

Ενίσχυση της ερευνητικής διάθεσης των μαθητών

Ένας δύσκολος, αλλά ιδιαίτερα σημαντικός στόχος της διδασκαλίας, είναι να δημιουργήσουμε ή να ενισχύσουμε το ενδιαφέρον των μαθητών για την έρευνα, στα πλαίσια πάντα των δυνατοτήτων τους, ιδίως στο Λύκειο. Ο στόχος αυτός μάλιστα, δεν είναι πάντα εύκολος ή αυτονόητος ακόμη και για τους άριστους ή/και επιμελείς μαθητές. Πολλές είναι οι περιπτώσεις που μαθητές απλά «καλοί ή και μέτριοι» εξελίχθησαν πολύ ως ενήλικες επιστημονικά ή κοινωνικά. Μέσα λοιπόν στο μικρό αλλά βασικό «πνευματικό φυτώριο» του Λυκείου καλό είναι να ενισχύουμε στο μέτρο του δυνατού και την ερευνητική διάθεση των μαθητών μας και τα μαθηματικά είναι το μοναδικό σχεδόν μάθημα που προσφέρει πολλές ευκαιρίες γι' αυτό. Και στον τομέα αυτόν μερικές καλές ερωτήσεις μπορούν να βοηθήσουν σε ένα βαθμό. Να μερικές τέτοιες ερωτήσεις, που δεν είναι βέβαια και οι μοναδικές:

- Δώσε μας ένα διαφορετικό παράδειγμα.
- Το πιστεύεις αυτό πραγματικά, Καίτη;
- Πως είσαι βέβαιος γι' αυτό Νίκο;
- Τι εννοείς με αυτό;
- Προσπάθησε να το πεις με άλλο τρόπο.
- Τι θα συνέβαινε αν τροποποιούσαμε τα δεδομένα;
- Μπορούμε άραγε αυτό το αποτέλεσμα να το απλοποιήσουμε;
- Γιατί άραγε στο βιβλίο υπάρχει αυτός ο περιορισμός; Μήπως δεν χρειάζεται;
- Μπορεί να το αποδείξει κανείς με διαφορετικό τρόπο; Με πιο κομψό τρόπο;
- Μπορείτε να διατυπώσετε ένα Γενικότερο ή Ειδικότερο ή Ανάλογο πρόβλημα.

Επίλογος

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι η διδακτική ερώτηση, δεν είναι μια τυχαία έκφραση, αλλά μια σπουδαία και δυναμική διδακτική πρόταση που απαιτεί την φροντίδα του εκπαιδευτικού. Η συστηματική χρήση των παραπάνω αρχών που αναφέραμε, πιστεύω ότι θα βοηθήσει στην μόνιμη και αυθόρμητη σύνταξη καλών διδακτικών ερωτήσεων, πράγμα που θα συμβάλει σε ένα βαθμό σε μια πιο αποτελεσματική διδασκαλία. Προς την κατεύθυνση αυτή, είναι χρήσιμο ορισμένες ερωτήσεις-κλειδιά του μαθήματος - να σχεδιάζονται από πριν, ώστε να ενεργοποιούν την σκέψη και αυτενέργεια των μαθητών, αλλά και τον καθηγητή να βοηθούν να προχωρήσει σύμφωνα με την διαδικασία που προγραμματίσει.

Εκτός από την διδακτική πλευρά των ερωτήσεων κατά την διδασκαλία, μεγάλη σημασία έχει το όλο πλαίσιο, μέσα στο οποίο καλείται να σκεφτεί και να απαντήσει ο μαθητής - είτε εκφραστεί είτε όχι. Η απάντηση του μαθητή και γενικότερα η πνευματική του κινητοποίηση, εξαρτάται από την ετοιμότητά του για μάθηση, τα κίνητρα που διαθέτει, το ρεπερτόριο των γνώσεων και δεξιοτήτων του, την

μεθόδευση της διδασκαλίας και από τους παρακάτω παράγοντες που θα αναφέρουμε επιγραμματικά:

Α. Την ύπαρξη δημοκρατικού - φιλικού (αλλά όχι πολύ ανεκτικού ή «αναρχικού») κλίματος στην τάξη.

Β. Την στάση που τηρεί ο Καθηγητής και η τάξη στην περίπτωση που ένα μαθητής απαντήσει «λάθος» ή δεν απαντήσει. Σε καμιά περίπτωση δεν επιτρέπεται η επίπληξη (ας έχουμε υπόψη και την γνωστή ρήση: «δεν υπάρχουν λανθασμένες απαντήσεις, αλλά λανθασμένες ερωτήσεις»). Επίσης να μην ξεχνάμε ότι ο μαθητής ορισμένες φορές απαντά σε άλλη ερώτηση, μη αντιλαμβανόμενος το νόημα της ερώτησης που του γίνεται. Από την άλλη μεριά ο καθηγητής πρέπει να *καρτερεί την ευκαιρία* για επιβράβευση, ιδίως σε αδύνατους μαθητές, ανάλογα με την δυσκολία της ερώτησης ή του προβλήματος.

Γ. Την ύπαρξη θετικού αυτοσυναισθήματος για κάθε μαθητή, δηλαδή αν ο μαθητής έχει διαμορφώσει ένα σύνολο πεποιθήσεων και στάσεων ευνοϊκών για τον εαυτό του.

Τελειώνοντας, πρέπει να έχουμε υπόψη ότι οι ερωτήσεις δεν πρέπει να κυριαρχούν στην διδασκαλία, αλλά να συνδυάζονται με παροτρύνσεις προς τους μαθητές και ανάθεση εργασιών μέσα στη τάξη στην κατεύθυνση της όσο το δυνατόν μεγαλύτερης (καθοδηγούμενης) αυτενέργειας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Εξαρχάκος Θ., Διδακτική Μαθηματικών, Ελληνικά γράμματα, 1988.
2. Δαμαλάς Γ., Διδακτική των Μαθηματικών. Αθήνα 1980.
3. Δερβίσης Σ., Σύγχρονη Γενική Διδακτική. Θεσσαλονίκη 1982.
4. Κασσωτάκης Μ., Η αξιολόγηση της επίδοσης των μαθητών.
Εκδόσεις Γρηγόρη. Αθήνα 1981
5. Πατεράκης Α., Σημειώσεις ειδικής διδακτικής Μαθηματικών.
6. Polya G., Πώς να το λύσω, εκδόσεις Καρδαμίτσα, Αθήνα 1998 .
7. Φλουρής Γ. - Gagne R., Θεμελιώδεις αρχές της μάθησης και της διδασκαλίας,
Αθήνα 1980.
8. Τουμάσης Χ., Διδακτική Μαθηματικών. Gutenberg, Αθήνα 1994 .
9. Μπουνάκης Δ., Οι ερωτήσεις στη διδασκαλία. ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Γ' τεύχος 17,
1987.
10. Μπουνάκης Δ., «Προγραμματισμός της διδασκαλίας - συμβολή στη διδακτική
αντιμετώπιση του Κεφαλαίου Συναρτήσεις (Β' Γυμνασίου),
ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Γ' τεύχος 18, 1988.
11. HENRY M., Διδακτική μαθηματικών, Μαθηματικό τμήμα Πανεπιστημίου
Αθηνών.

* * *