

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ
ΔΕΥΤΕΡΑ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2013**

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν $a > 0$ και $a \neq 1$, τότε για οποιοδήποτε $\theta > 0$ και $\kappa \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι
$$\log_a \theta^\kappa = \kappa \cdot \log_a \theta$$

Μονάδες 10

A2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται περιττή αν για κάθε $x \in A$, ισχύει :

$$-x \in A \text{ και } f(-x) = -f(x).$$

β. Η συνάρτηση $f(x) = a^x$ με $a > 1$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

γ. Η εξίσωση $\sin x = \sin \theta$, έχει λύσεις $x = 2k\pi + \theta$ ή $x = 2k\pi - \theta$ με $k \in \mathbb{Z}$.

δ. Κάθε σταθερό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.

ε. Για κάθε $a > 0$ και $a \neq 1$ ισχύει $\log_a a = 1$.

Μονάδες 5x2=10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x - 2$ το οποίο έχει παράγοντα το $x - 2$.

B1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -3$.

B2. Να κάνετε την διαίρεση του $P(x)$ με το $x^2 + 2x + 1$ και να γράψετε την ταυτότητα της.

B3. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

Μονάδες 8 + 8 + 9 = 25

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{x-1}{x-2}$.

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

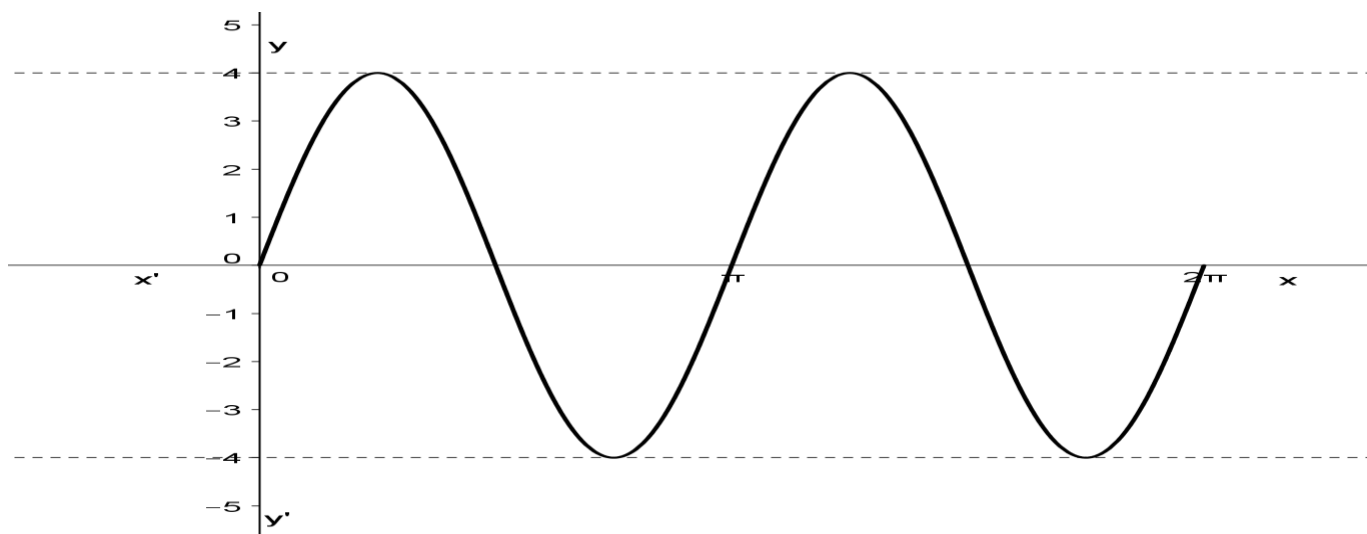
Γ2. Να αποδείξετε ότι $f(3) + f(4) + f(\frac{1}{2}) = 0$.

Γ3. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) + \ln(x-2) = e^{\ln 2} + \ln 1$.

Μονάδες 8 + 8 + 9 = 25

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \rho \cdot \eta\mu(\omega x)$, με $\rho > 0$, $\omega > 0$ και πεδίο ορισμού $A = [0, 2\pi]$, που η γραφική της παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Δ1. Με βάση το σχήμα να βρείτε τα ακρότατα της $f(x)$ και τις τιμές του x για τις οποίες παρουσιάζει την ελάχιστη τιμή της.

Δ2. Να υπολογίσετε την περίοδο T της συνάρτησης $f(x)$ καθώς και τα ρ , ω .

Δ3. Αν $f(x) = 4\eta\mu(2x)$ να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 2$ στο διάστημα $[0, \pi]$.

Δ4. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(\frac{\pi}{9})$, $f(\frac{\pi}{7})$, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Μονάδες 8 + 6 + 6 + 5 = 25