1. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να δείξετε ότι η f:R→R για την οποία ισχύει

$f(x)+e^{f(x)}=x-1$ για κάθε χ του R είναι γν. αύξουσα.

ΛΥΣΗ

1ος Τρόπος :

Έστω $g(x)=x+e^x+1$ στο R.

Είναι $g'(x)=e^x+1>0$ άρα η g γν. αύξουσα στο R.

(Η με κατασκευή του ορισμού της γν. αύξουσα σας συνάρτησης για την g)

Είναι $f(x)+e^{f(x)}=x-1$

$f(x)+e^{f(x)}+1=x$

$g(f(x))=x$

$g^{-1}(g(f(x)))=g^{-1}(x)$

$f(x)=g^{-1}(x)$

Επειδή η g γν. αύξουσα θα είναι και η g^{-1} γν. αύξουσα δηλαδή η f γν. αύξουσα.

2ος Τρόπος :

Έστω **τυχαία** $\chi_1 < \chi_2$ με $f(\chi_1) \geq f(\chi_2)$ τότε $e^{f(x_1)} \geq e^{f(x_2)}$ με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε

$$e^{f(x_1)}+f(x_1) \geq e^{f(x_2)}+f(x_2)$$

$$x_1 - 1 \geq x_2 - 1$$

$$x_1 \geq x_2$$

Άρα έχουμε άτοπο , οπότε αναγκαία θα ισχύει αν $\chi_1 < \chi_2 \Rightarrow f(\chi_1) < f(\chi_2)$ άρα η f γν. αύξουσα.

2. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω f συνάρτηση ώστε $f^3(x)+2f(x)=3-\chi$ για κάθε χ του R για κάθε χ του R

i) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

ii) Να βρεθεί η $f^{-1}(x)$

ΛΥΣΗ

i) Έστω τυχαία $x_1,x_2 \in R$ με $f(x_1)=f(x_2)$ έχουμε $f(x_1)=f(x_2)$

$2f(x_1)=2f(x_2)$

$f^3(x_1)=f^3(x_2)$

Με πρόσθεση κατά μέλη $f^3(x_1)+2f(x_1)=f^3(x_2)+2f(x_2)$

$3-x_1=3-x_2$

$x_1=x_2$ άρα η f είναι "1-1"

οπότε η f είναι αντιστρέψιμη.

ii)Έστω $g(x)=-x^3-2\chi+3$ στο R.

Είναι $g'(x)=-3\chi^2-2<0$ άρα η g αυστηρώς φθίνουσα αύξουσα στο R.

Ακόμη $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$

Άρα η g^{-1} υπάρχει , και έχει πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών το R.

Είναι $f^3(x)+2f(x)=3-\chi$

$-f^3(x)-2f(x)+3=x$

$g(f(x))=x$

$g^{-1}(g(f(x)))=g^{-1}(x)$

$f(x)=g^{-1}(x)$

Άρα η f έχει πεδίο τιμών το πεδίο τιμών της g^{-1}.

Οποτε και το πεδιο ορισμου της f^{-1}

Έστω $\psi=f(\chi)$ έχουμε- $\psi^3-2\psi+3=x$ άρα

$f^{-1}(x)=-\chi^3+2\chi+3$,$x \in R$