Πώς εργαζόμαστε σε ασκήσεις που θέλουν να εξετάσουμε αν μια συναρτηση f είναι αντιστρέψιμη ή 1-1.

Απάντηση

Πρώτα από όλα εξετάζουμε αν πληρούνται οι αναγκαίες προϋποθέσεις για να αντιστρέφεται μια συνάρτηση δηλαδή να είναι <<1 – 1>> .

1. Για οποιοδήποτε $x_1,x_2 \in A$ (όπου Α = πεδίο ορισμού της f), **, αν $f(x_{1)} = f(x_{2)}$, τότε κάνω πράξεις ώστε να καταλήξω στην $x_1 = x_2$.** (ΓΙΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ)
2. Εξετάζω την μονοτονία δηλ βρίσκω αν είναι γν .μονότονη σε όλο το πεδίο ορισμού
   i. Με τον ορισμό μονοτονίας .
   ii. Με παραγώγους .
3. Αποδεικνύω ότι η εξίσωση $\psi = f(\chi)$ έχει μοναδική λύση για κάθε $\chi \in A$.

Στη συνέχεια , αφού έχουμε εξασφαλίσει την ύπαρξη της αντίστροφης ακολουθούμε τα εξής :

Βήμα 1ο:

Θέτουμε y=f(x)και λύνουμε ως προς x=……g(y)	Περιορισμούς παίρνω όταν 1. Διαιρώ 2. Παίρνω ρίζες 3. Λογαριθμω 4. Υψώνω στο τετράγωνο(άρτια δύναμη)

Βήμα 2ο:

- Το x= g(y) για να το δεχτούμε πρέπει να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.
- Λύνουμε τους περιορισμούς για τα ψ .
- Το σύνολο των περιορισμών είναι το σύνολο τιμών της f, (το οποίο είναι το πεδίο ορισμού της αντίστροφής) **:**

Βήμα 3ο:

Αντικαθιστούμε στη σχέση (1) όπου x το y και το y με x οπότε $y = f^{-1}(x)$ και έχουμε τον τύπο της αντίστροφης.

ΣΧΟΛΙΑ:

1. Μερικες φορες αν υπαρχουν $x_1 \neq x_2$ ώστε να ισχυει $f(x_1) = f(x_2)$ **δεν ειναι 1-1**.
2. **Δ**οκιμάζουμε με τιμές : Δηλαδή αν υπάρχει $\chi_1,\chi_2 \in A$ με $\chi_1 \neq \chi_2$,και δείχνουμε ότι $f(\chi_1) = f(\chi_2)$ τότε η f **ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ** «1-1» (Μέθοδος για τριγωνομετρικές συναρτήσεις)
3. Αν είναι **άρτια** στο Α η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα ψ'ψ ΤΟΤΕ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ «1-1» στο Α (Μέθοδος για τριγωνομετρικές συναρτήσεις ή συναρτήσεις με άρτιες δυνάμεις)
4. .Αν είναι γνησίως μονότονη ΤΟΤΕ **ΕΙΝΑΙ** «1-1»
5. Αν τελικά η λύση χ=… είναι μοναδική τότε η f <1-1> άρα υπάρχει η f^{-1}

ΠΡΟΣΟΧΗ: Αν μια συνάρτηση είναι «1-1» τότε **δεν είναι αναγκαία** και μονότονη.
ΠΡΟΣΟΧΗ: Θα είναι γν.μονότονη σε ένα διάστημα [α, β] αν και μόνο αν είναι η f συνεχής στο [α, β] και 1-1.Μόνο σε ένα διάστημα και όχι σε ένωση.

6. Αν υπάρχει τιμή $\psi_0 \in f(A)$ τέτοια ώστε η εξίσωση $\psi=f(\chi)$ να έχει τουλάχιστον δυο ρίζες λύσεις $\chi_1,\chi_2 \in A$ με $\chi_1 \neq \chi_2$ **ΤΟΤΕ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ«1-1».**(ειδικα για πολυτιμες)
7. Όταν για κάθε $\psi \in f(A)$ η εξίσωση $\psi=f(\chi)$ έχει ***μια και μόνο*** μια ρίζα $\chi_0 \in A$ ΤΟΤΕ ΕΙΝΑΙ «1-1»
8. Αν η γραφική παράσταση της f (ειδικα για πολυτιμες)

α).Τέμνει τον άξονα τον χ'χ μια και μόνο μια φορά ΤΟΤΕ ΕΙΝΑΙ «1-1» (η κάθε παράλληλη προς τον x'x)
β).Τέμνει τον άξονα τον χ'χ τουλάχιστον δυο φορές ΤΟΤΕ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ «1-1» (η κάθε παράλληλη προς τον x'x)