Δίνεται συνάρτηση f, για την οποία ισχύει η σχέση $f^3(x)+f(x)=2e^x$,για κάθε x∈ R

Να αποδείξετε οτι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί η αντίστροφη της.

Έστω $x_1,x_2 \in R$ με f(x_1)=f(x_2) τότε $f^3(x_1)=f^3(x_2)$. Προσθέτωντας κατά μέλη έχουμε

$f^3(x_1)$ + f(x_1)=$f^3(x_2)$+ f(x_2). Συνεπώς $2e^{x_1}=2e^{x_2}$ άρα $e^{x_1}=e^{x_2}$ οπότε x_1=x_2.Άρα η f 1-1, συνεπώς αντιστρέφεται.

Έστω $\psi_0 \in R$ τότε $\left(\psi^3{}_0+\psi_0\right)\in R$

Έξετάζουμε το πρόσημο του $\psi^3{}_0+\psi_0$. Έχουμε $\psi^3{}_0+\psi_0>0 \Leftrightarrow (\psi^2{}_0+1)\psi_0$>0

$\Leftrightarrow \psi_0>0$

Μόνο για $\psi_0>0$ υπάρχει $x_0 \in R$ τέτοιο ώστε $\psi^3{}_0+\psi_0=2e^{x_0}$.

Για κάθε x∈ R ισχύει $f^3(x)+f(x)=2e^x$ άρα και για x=x_0 έχουμε $f^3(x_0)+f(x_0)=2e^{x_0}$

Οπότε $f^3(x_0)+f(x_0)=\psi^3{}_0+\psi_0 \Rightarrow f^3(x_0)-\psi^3{}_0+f(x_0)-\psi_0=0$

$\Rightarrow (f(x_0)-\psi_0)(f^2(x_0)+f(x_0)\psi_0+\psi_0)+(f(x_0)-\psi_0)=0 \Rightarrow$

$(f(x_0)-\psi_0)(f^2(x_0)+f(x_0)\psi_0+\psi_0+1)=0$.*Οπότε* $f(x_0)=\psi_0$

διότι $f^2(x_0)+f(x_0)\psi_0+\psi_0+1\geq 1$.

Άρα $f(x)=\psi_0$ *οπότε η f έχει σύνολο τιμών το (0,+∞)*

Βάζοντας στην αρχική σχέση όπου x το $f^{-1}(x)$ *έχουμε* $x^3+x=2e^{f^{-1}(x)}$ *οπότε*

$f^{-1}(x)=ln(\frac{x^3+x}{2})$ *με* $x\in(0,+\infty)$

Πιστεύω πως ένα τέτοιο ερώτημα θα έχει πολλές αντιδράσεις, για τα μόρια που θα πρέπει να κοπούν για την μη εύρεση του συνόλο τιμών της f. Τα περισσότερα σχολικά βοηθήματα, στην λύση τους δίνουν αμέσως την f^{-1},χωρίς να έχουν βρεί το σύνολο τιμών της f , ή στην καλύτερη περίπτωση βρίσκουν το πεδίο ορισμού της f^{-1} αφού έχουν βρεί αυτή.

Μπορεί κάποιος να διαβάσει και τις οδηγίες συμβουλές του σχολικού συμβούλου κ.Μπουνακή στο http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=78&t=3541

(σελίδα 5, σημείωση 2.)

Στην παραπάνω άσκηση μπορούν να μπούν πολλά ερωτήματα, για παράδειγμα.

Επιπλέον ασκήσεις του ίδιου τύπου.

Άσκηση 1.

Έστω συνάρτηση fγια την οποία ισχύει $f^3(x) + 5f(x) + x = 0$ για κάθε $x \in R$

i. Να βρείτε το πρόσημο της f
ii. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτηση f^{-1}
iii. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα
iv. Να λύσετε την εξίσωση $f(x - 19) = x + 1$
v. Να βρείτε το

$$\lim_{x \to 0} \frac{f^{-1}(x)}{\eta\mu x}$$

Άσκηση 2.

Το θέμα 7, στη συλλογή θεμάτων

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=55&t=2837