

Μιγαδικοί αριθμοί. Άσκηση (από ξένο μαθηματικό διαγωνισμό)

Να βρεθεί ο γ.τ. των εικόνων M των μιγαδικών z που ικανοποιούν τη συνθήκη

$$|z - |z + 1|| = |z + |z - 1|| \quad (1)$$

ΛΥΣΗ

1^{ος} Τρόπος Η ισότητα **(1)** ισοδύναμα γράφεται:

$$|z - |z + 1||^2 = |z + |z - 1||^2 \Leftrightarrow$$

$$(z - |z + 1|)(\bar{z} - |z + 1|) = (z + |z - 1|)(\bar{z} + |z - 1|) \Leftrightarrow$$

$$z\bar{z} - (z + \bar{z})|z + 1| + |z + 1|^2 = z\bar{z} + (z + \bar{z})|z - 1| + |z - 1|^2 \Leftrightarrow$$

$$|z - 1|^2 - |z + 1|^2 + (z + \bar{z})(|z - 1| + |z + 1|) = 0 \quad \mathbf{(2)}.$$

Ισχύει: $|z - 1|^2 - |z + 1|^2 = (z - 1)(\bar{z} - 1) - (z + 1)(\bar{z} + 1) = -2(z + \bar{z})$, οπότε

$$\mathbf{(2)} \Leftrightarrow -2(z + \bar{z}) + (z + \bar{z})(|z - 1| + |z + 1|) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(z + \bar{z})(|z - 1| + |z + 1| - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} z + \bar{z} = 0 \\ \text{ή} \\ |z - 1| + |z + 1| = 2 \end{cases} \quad \mathbf{(3)}$$

2^{ος} Τρόπος

$$|z - |z - 1|| = |z + |z + 1||$$

$$|x + yi - |z - 1|| = |x + yi + |z + 1||$$

$$(x - |z - 1|)^2 + y^2 = (x + |z + 1|)^2 + y^2$$

$$x^2 - 2x|z - 1| + x^2 - 2x + 1 + 1 = x^2 + 2x|z + 1| + x^2 + 2x + 1 + 1$$

$$2x|z - 1| - 2x = -2x|z + 1| + 2x$$

$$2x(|z - 1| + |z + 1| - 2) = 0$$

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ \text{ή} \\ |z-1| + |z+1| = 2 \end{cases}$$

άρα $x=0$ δηλαδή ο άξονας $\psi\psi'$ ή $|z-1| + |z+1| = 2$ (μοιάζει με έλλειψη)

Έστω $z_1 = 1+0i=1$, $z_2 = -1+0i=-1$ και τυχαίο $z = \chi + \psi i$ με εικόνες τα $E(1,0)$, $E'(-1,0)$ και $M(\chi, \psi)$, αντίστοιχα.

Σε κάθε έλλειψη ισχύει $ME' + ME = 2a$ και $ME' + ME > EE'$

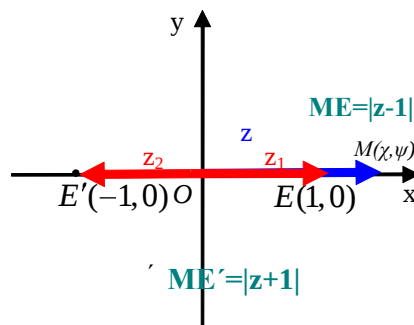
$$|z-z_1| + |z-z_2| = 2a \quad \text{και} \quad 2a > |z_1 - z_2|$$

$$\text{εδώ έχουμε } |z-(1+0i)| + |z-(-1+0i)| = 2 \quad \text{και} \quad 2a > |1-(-1)|$$

$$|z-1| + |z+1| = 2 \quad \text{και} \quad 2 > 2 \quad \text{άτοπο άρα δεν είναι έλλειψη}$$

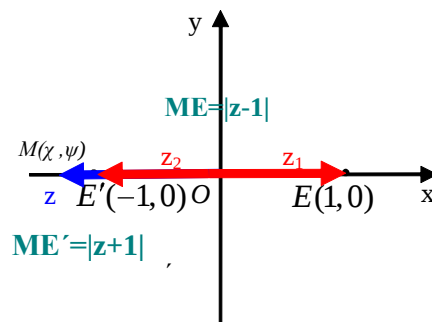
οπότε έστω M η εικόνα του z

α) αν το M εκτός από την μεριά του E στην ίδια ευθεία άτοπο



$$\text{γιατί } |z - (-1)| > 2$$

β) αν το M εκτός από την μεριά του E' στην ίδια ευθεία άτοπο

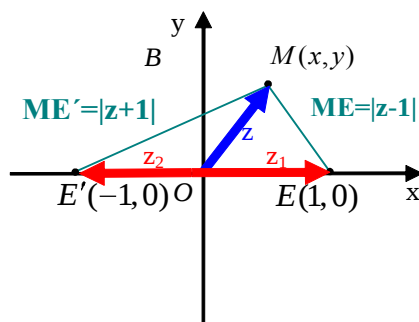


$$\text{γιατι } |z - (1)| > 2$$

γ) αν το M εκτός του ευθύγραμμου τμήματος άτοπο EE' λόγω τριγωνικής ανισότητας

$$ME' + ME > EE'$$

$$\begin{aligned} |z-1| + |z+1| &> 2 \\ 2 &> 2 \end{aligned} \text{ .άτοπο .}$$



Άρα το M είναι μεταξύ E και E' και πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα EE' .

Τελικά

$$\text{Οι μιγαδικοί } Z \text{ ικανοποιούν την (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ή} \\ M \in EE' \end{cases}$$

Δηλαδή ο γ.τ. των εικόνων $M(x, y)$ των Z που ικανοποιούν την (1) είναι

το ευθύγραμμο τμήμα EE' και η μεσοκάθετός του $y'y$.