# ΒΟΥΛΓΑΡΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

13 Ιουλίου 2013

1. Να βρεθεί το πλήθος λύσεων του συστήματος

$$\begin{cases} x+y+z=3xy, \\ x^2+y^2+z^2=3xz, \\ x^3+y^3+z^3=3yz. \end{cases}$$

2. Θεωρούμε τους ρητούς $a, b, c$, για τους οποίους ισχύει

$$a+b+c=a^2+b^2+c^2.$$

   Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $abc$ γράφεται ως το πηλίκο ενός τέλειου κύβου προς ένα τέλειο τετραγωνο, τα οποία είναι μεταξύ τους πρώτα.

3. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι $m, n$ τέτοιοι, ώστε

$$m(m+1)(m+2)(m+3)=n(n+1)^2(n+2)^3(n+3)^4.$$

4. Να λυθεί στους ακεραίους η εξίσωση

$$x^3+10x-1=y^3+6y^2.$$

5. Δίνονται οι εξισώσεις

$$[x]^3+x^2=x^3+[x]^2, \quad [x^3]+x^2=x^3+[x^2].$$

   Να αποδείξετε ότι η πρώτη εξίσωση έχει μόνο ακέραιες λύσεις και ότι η δεύτερη εξίσωση έχει μη ακέραια λύση.

6. Να λυθεί στους ακεραίους η εξίσωση
$$2^a + 8b^2 = 283 + 3^c.$$

7. Να αποδείξετε ότι αν $a, b, c \geq 1$ και $a + b + c = 9$, τότε
$$\sqrt{ab + bc + ca} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

8. Να λυθεί στους ακεραίους η εξίσωση
$$z^2 + 1 = xy(xy + 2y - 2x - 4).$$

9. Η ακολουθία $\{\mathrm{a_n}\}_{\mathrm{n}=1}^{\infty}$ ορίζεται ως ακολούθως: $\mathrm{a_1} = 0$ και $\mathrm{a_{n+1}} = \mathrm{a_n} + 4\mathrm{n} + 3,\ \mathrm{n} \geq 1$. Να υπολογίσετε το όριο
$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty} \frac{\sqrt{\mathrm{a_n}} + \sqrt{\mathrm{a_{4n}}} + \cdots + \sqrt{\mathrm{a_{4^{10}n}}}}{\sqrt{\mathrm{a_n}} + \sqrt{\mathrm{a_{2n}}} + \cdots + \sqrt{\mathrm{a_{2^{10}n}}}}$$

10. Αν $a, b, c$ ακέραιοι και ο αριθμός
$$\frac{a(a-b) + b(b-c) + c(c-a)}{2}$$
είναι τέλειο τετράγωνο, να αποδείξετε ότι $a = b = c$.

11. Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι $x, y, z$, για τους οποίους ο αριθμός
$$\sqrt{\frac{2005}{x+y}} + \sqrt{\frac{2005}{y+z}} + \sqrt{\frac{2005}{z+x}}$$
είναι θετικός ακέραιος.

12. Να βρείτε τους θετικούς ακέραιους $a, b$ για τους οποίους ισχύει
$$[a[bn]] = n - 1$$
για κάθε θετικό ακέραιο $n$.

13. Να λυθεί στους θετικούς ακεραίους η εξίσωση
$$2^t = 3^x 5^y + 7^z.$$

14. Να βρεθούν οι ακέραιοι $a, b, c, d$, για τους οποίους

$$ac - 3bd = 5, \ ad + bc = 6.$$

15. Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί $a \neq 0, \ b$ ώστε για κάθε μιγαδική ρίζα $w$ της εξίσωσης $z^4 - az^3 - bz - 1 = 0$ να ισχύει $|a - w| \geq |w|$.

16. Να αποδείξετε ότι $t^2(xy + yz + zx) + 2t(x + y + z) + 3 \geq 0$ για κάθε $x, y, z, t \in [-1, 1]$.

17. Να βρεθεί ο ελάχιστος θετικός ακέραιος $a$ ώστε το σύστημα

$$\begin{cases} x + y + z = a, \\ x^3 + y^3 + z^3 = a \end{cases}$$

να μην έχει καμία ακέραια λύση.

18. Αν οι $x, y, a$ είναι πραγματικοί αριθμοί του διαστήματος $(0, 1)$, να αποδείξετε ότι

$$\frac{|x - y|}{1 - xy} \leq \frac{|x^a - y^a|}{1 - x^a y^a}.$$

19. Οι πραγματικοί αριθμοί $a, b$ ικανοποιούν τη σχέση $b^3 + b \leq a - a^3$. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $a + b$.

20. Αν $a, b, c > 0$ να αποδείξετε ότι

$$\frac{ab}{3a + 4b + 5c} + \frac{bc}{3b + 4c + 5a} + \frac{ca}{3c + 4a + 5b} \leq \frac{a + b + c}{12}.$$

21. Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς $a_1, a_2, ..., a_{2005}, b_1, b_2, ..., b_{2005}$ ώστε να ισχύει

$$(a_i x - b_i)^2 \geq \sum_{j=1, j \neq i}^{2005} (a_j x - b_j)$$

για κάθε πραγματικό $x$ και για κάθε $i = 1, 2, ..., 2005$. Να βρείτε το μέγιστο πλήθο θετικών αριθμών μεταξύ των $a_i, b_i, \ i = 1, 2, ..., 2005$.