

1. Έστω  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ . Να αποδείξετε ότι ο αριθμός  $E = z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_1}$  είναι πραγματικός.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



Απάντηση 1

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=69&t=38188&p=177695#p177695>

2. Εάν Να αποδείξετε ότι  $|z_1| = |z_2| = 1$  και  $z_1 \cdot z_2 \neq -1$  να αποδείξετε ότι  $\frac{z_1 + z_2}{z_1 \cdot z_2 + 1} \in \mathbb{R}$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



Απάντηση 2

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=69&t=38188&p=177695>

3. Έστω οι μιγαδικοί  $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$  με  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \dots = |z_n| = \rho > 0$ . Να αποδείξετε

ότι ο αριθμός  $E = \frac{(z_1 + z_2)(z_2 + z_3) \cdots (z_{n-1} + z_n)(z_n + z_1)}{z_1 z_2 \cdots z_n}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 3

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=69&t=38189>

4. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός:

ι.  $E_1 = (2 + i\sqrt{5})^7 + (2 - i\sqrt{5})^7$  είναι πραγματικός.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 4ι

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=69&t=38189>

ii.  $E_2 = \left(\frac{19+7i}{9-i}\right)^v + \left(\frac{20+5i}{7+6i}\right)^v$  είναι πραγματικός

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 4ii

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=69&t=38189>

5. Έστω οι μιγαδικοί  $z_1, z_2, z_3$  τέτοιοι ώστε  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \rho > 0$  και  $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$ .

Να αποδείξετε ότι  $\left| \frac{z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3}{z_1 + z_2 + z_3} \right| = \rho$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 5

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=69&t=38191&p=177703#p177703>

6. Έστω  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ . Να αποδείξετε την ταυτότητα  $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 6

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=69&t=38191&p=177703#p177703>

7. Έστω  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ . Να αποδείξετε την ταυτότητα

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_1 + z_2 + z_3|^2$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 7

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=69&t=38203>

8. Ας είναι  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  τέτοιοι ώστε  $\operatorname{Im}(\bar{z}_1 z_2) = \operatorname{Im}(\bar{z}_2 z_3) = \operatorname{Im}(\bar{z}_3 z_1) \neq 0$ . Να δείξετε ότι

$$|z_1 - z_2|^2 + |z_2 - z_3|^2 + |z_3 - z_1|^2 = 3(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2)$$

(1988 Romanian Math Olympiad, School Competition, 10th grade)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 8

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=69&t=38203>

9. Για κάθε  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  να αποδείξετε τις ταυτότητες:

a.  $|1 + z_1 \bar{z}_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 9Α

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=69&t=38219>

b.  $|1 - z_1 \bar{z}_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 9Β

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=69&t=38219>

10. Για κάθε  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$|z_1 + z_2 + z_3|^2 + |-z_1 + z_2 + z_3|^2 + |z_1 - z_2 + z_3|^2 + |z_1 + z_2 - z_3|^2 = 4(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2)$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



## ΑΠΑΝΤΗΣΗ 10

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=69&t=38219>

11. Έστω οι μιγαδικοί  $z_1, z_2, z_3$  που είναι τέτοιοι ώστε  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$  και  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$  Να αποδείξετε ότι:

- i.  $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$
- ii.  $|z_1 - z_2| = |z_1 - z_3| = |z_3 - z_2|$
- iii.  $\left| 1 - \frac{z_3}{z_1} \right| = \sqrt{3}$

## ΑΠΑΝΤΗΣΗ



## ΑΠΑΝΤΗΣΗ 11

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=38220>

12. Δίνονται οι ανά δύο διαφορετικοί μιγαδικοί  $z_1, z_2, z_3$  τέτοιοι ώστε  $|z_1| = |z_2| = |z_3| > 0$

Εάν οι αριθμοί  $z_1 + z_2 z_3, z_2 + z_1 z_3, z_3 + z_1 z_2$  είναι πραγματικοί, να αποδείξετε ότι  $z_1 z_2 z_3 = 1$

(1979 Romanian Math Olympiad, State Competition, 10th grade)

## ΑΠΑΝΤΗΣΗ



## ΑΠΑΝΤΗΣΗ 12

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=38221>

13. Εάν  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  ώστε  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$  τότε να δείξετε ότι :

$$(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 + z_1 + z_2 + z_3)^2 = z_1 z_2 z_3 |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 + z_1 + z_2 + z_3|^2$$

(1988 Romanian Math Olympiad, School Competition, 10th grade)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 13

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=38223&p=177864#p177864>

14. Έστω  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ .

- a. Εάν  $|z_1| = |z_2| = |z_3|$  τότε :  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$  αν και μόνο αν  $z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = 0$
- b. Εάν  $z_1 + z_2 + z_3 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = 0$  τότε  $|z_1| = |z_2| = |z_3|$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 14

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=38224>

15. Έστω  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ . Να αποδείξετε ότι  $\max\{|z_1|, |z_2|\} \leq |z_1 + z_2| + \sqrt{|z_1 z_2|}$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 15

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=38225>

16. Ας είναι  $z \in \mathbb{C}$ . Να αποδείξετε ότι :  $\operatorname{Im}(z) > 0 \Leftrightarrow \left| \frac{z-i}{z+i} \right| < 1$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 16

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=38228>

17. Να αποδείξετε ότι για κάθε μιγαδικό αριθμό  $z$ , είναι  $|z+1| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$  ή  $|z^2+1| \geq 1$

"complex numbers from A to Z", Titu Andreescu

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 17

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=38229>

18. Ας είναι  $u, v, w, z$  μιγαδικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε  $|u| \leq 1, |v| = 1$  και  $w = \frac{v(u-z)}{\bar{u} \cdot z - 1}$ . Να αποδείξετε ότι:  $|w| \leq 1$  αν και μόνο αν  $|z| \leq 1$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 18

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=38230>

19. Έστω  $z \in \mathbb{C}$  τέτοιος ώστε:  $11z^{10} + 10iz^9 + 10iz - 11 = 0$ . Να αποδείξετε ότι:  $|z| = 1$ .

Putnam 1989 A3.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 19

20. Ας είναι  $z \in \mathbb{C}^*$  τέτοιος ώστε  $\left|z^3 + \frac{1}{z^3}\right| \leq 2$ . Να αποδείξετε ότι:  $\left|z + \frac{1}{z}\right| \leq 2$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 20

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=38233>

21. Ας είναι  $z \in \mathbb{C}$  με  $\operatorname{Re}(z) > 1$ . Να αποδείξετε ότι:  $\left| \frac{1}{z} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 21

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=38227>

22. Να δείξετε ότι: αν  $|z| < \frac{1}{2}$  τότε  $|(1+i)z^3 + iz| < \frac{3}{4}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 22

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=38242>

23. Ας είναι  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  τέτοιοι ώστε  $|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1| = a$  και  $|z_1 z_2 z_3| = \beta$ , όπου  $a \neq 0 \neq \beta$ . Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $k \in \{1, 2, 3\}$  για το οποίο είναι:  $|z_k| \leq \frac{3\beta}{a}$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 23

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=38243&p=177939#p177939>

24. Ας είναι  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  τέτοιοι ώστε  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = R > 0$ . Αποδείξτε ότι:

$$|z_1 - z_2| \cdot |z_2 - z_3| + |z_3 - z_1| \cdot |z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| \cdot |z_3 - z_1| \leq 9R^2.$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 24

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=38244>

25. Να αποδείξετε την ανισότητα του *Hlawka* . Δηλαδή ότι: για κάθε  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  ισχύει  $|z_1 + z_2| + |z_2 + z_3| + |z_3 + z_1| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_1 + z_2 + z_3|$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 25

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=13&t=20760>

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=8793&hilit=hlawka>

26. Έστω  $z = 9 + bi$  , όπου  $b$  θετικός πραγματικός αριθμός . Εάν τα φανταστικά μέρη των  $z^2$  και  $z^3$  , να βρείτε το  $b$  .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 26

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=38248&p=177956#p177956>

27. Έστω οι διαφορετικοί ανά δύο μιγαδικοί αριθμοί  $a, b, c$  . Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός  $\lambda$  ώστε  $a + c - 2b = \lambda i(a + b - 2c)$  . Αποδείξτε ότι

$$|b + c - 2a| = 3|b - c| .$$

[G.M. 2/2011]

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 27

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=38250>

28. Θεωρούμε όλους τους μιγαδικούς  $z$  με  $|z| = 1$  . Αποδείξτε ότι :

$$\sqrt{3} \leq |1 + z| + |1 - z + z^2| \leq \frac{13}{4}$$

[Διαγωνισμός «Alexandru Muller» Iasi , Romania 8/4/2010]

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 28

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=38254>

29. Έστω  $a, b, c \in \mathbb{R}^*$  και οι μιγαδικοί  $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$  με  $|z| = 1$  που ικανοποιούν τη σχέση  $az^2 + b\bar{z} + c = 0$ . Αποδείξτε ότι:  $\frac{c}{a} \in (-3, 1)$  και  $\frac{b}{a} \in (-2, 2)$ .

[G.M. 1/2011]

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 29

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=38256>

30. Θεωρούμε τους μιγαδικούς που ικανοποιούν τις σχέσεις:  $|z_1^3 + z_2^3| \leq 2, |z_1 z_2| \leq 1$ . Αποδείξτε ότι:  $|z_1 + z_2| \leq 2$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 30

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=38257>

31. Θεωρούμε τους μιγαδικούς  $z_1, z_2$  με ίσα μέτρα και τον πραγματικό αριθμό  $\alpha > 1$ . Αποδείξτε ότι:  $(\alpha + 1)|z_1 + z_2| \leq 2|az_1 + z_2|$ .

[G.M. 3/2011]

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



Μιγαδικοί 31

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=38258>

32. Θεωρούμε τους μιγαδικούς  $z_1, z_2, z_3$  που ικανοποιούν τις σχέσεις:  $|2z_1 - z_2 - z_3| = |z_2 - z_3|, |2z_2 - z_1 - z_3| = |z_1 - z_3|$ . Αποδείξτε ότι:  $z_1 = z_2$ .

[G.M. 3/2011]

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 32

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=38259&p=178008#p178008>

33. Θεωρούμε όλους τους μιγαδικούς  $z$  που ικανοποιούν την σχέση  $|z + 1 + i| = 2$ . Βρείτε τους μιγαδικούς  $z$  για τους οποίους η παράσταση  $|z - 2 + 5i|$  παίρνει ελάχιστη και μέγιστη τιμή.

[G.M. 6/2011]

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 33

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=38262&p=178015#p178015>

34. Βρείτε όλες τις τριάδες μιγαδικών  $(a, b, c)$  που ικανοποιούν τις σχέσεις  $|a| = |b| = |c|$  και  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 1$ . [Διαγωνισμός «Argument» Baia Mare, Romania 6/11/2010]

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 34

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=38263&p=178016#p178016>

35. Για τους μιγαδικούς  $z$  ισχύουν οι σχέσεις  $|1 + z| \leq 1$  και  $|1 + z^2| \leq 1$ .  
Αποδείξτε ότι  $|z| \leq 1$ .

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ 2002 - Γ ΛΥΚΕΙΟΥ 4<sup>ο</sup> θέμα (για  $a = 1$ )

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 35

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=38264>

36. Ορίζουμε το σύνολο  $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| \leq 1, |z - \varepsilon| \leq 1, |z - \varepsilon^2| \leq 1\}$  όπου  $\varepsilon$  η ρίζα της εξίσωσης  $x^2 + x + 1 = 0$ .

a. Να δείξετε ότι:  $|z| \leq 1$

b. Βρείτε όλα τα στοιχεία του συνόλου  $A$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 36

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=38265>

37. Έστω  $a, b, c \in \mathbb{R}$  και  $w = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Υπολογίστε  
 $(a + bw + cw^2)(a + bw^2 + cw)$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 37

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=38266>

38. Βρείτε όλους τους μιγαδικούς  $z$  ώστε  $4z^2 + 8|z|^2 = 8$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 38

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=38268>

39. Βρείτε όλους τους μιγαδικούς  $z$  ώστε  $|z| = 1$  και  $|z^2 + \bar{z}^2| = 1$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 39

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=38269&p=178036#p178036>

40. Έστω  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  ώστε:  $|z_1 + z_2| = \sqrt{3}$  και  $|z_1| = |z_2| = 1$ . Υπολογίστε  $|z_1 - z_2|$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 40

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=38270>

41. Θεωρούμε τους μιγαδικούς  $a, b, c$  ώστε  $a|bc| + b|ac| + c|ab| = 0$ . Αποδείξτε ότι:  
 $|(a-b)(b-c)(c-a)| \geq 3\sqrt{3}|abc|$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 41

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=2593>

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=38286>

42. Επιλύστε στο  $C^*$  το σύστημα  $x + y + z = 1 = xyz$  και  $|x| = |y| = |z|$ .

Από ολυμπιάδα της Ρουμανίας για το 2009 απευθύνεται στους μαθητές της Χ τάξης (α λυκείου)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 42

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=38287>

43. Έστω οι μιγαδικοί  $z$  με  $|z| = 1$ , να αποδείξετε ότι  $\sqrt{2} \leq |1 - z| + |1 + z^2| \leq 4$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 43

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=13679>

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=38241>

44. Να λύσετε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών την εξίσωση  $z^2 = 4z + |z|^2 + \frac{16}{|z|^3}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 44

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=23264>

45. Βρείτε όλους τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$  που είναι τέτοιοι ώστε

$$|z - |z + 1|| = |z + |z - 1||.$$

Από το βιβλίο των Adreescu & Andrica σελ. 166.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 45

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=38288&p=178119#p178>

119

46. Έστω οι μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί  $x, y$  τέτοιοι ώστε:  $x^2 + xy + y^2 = 0$ .

Βρείτε την τιμή της παράστασης:  $\left(\frac{x}{x+y}\right)^{1990} + \left(\frac{y}{x+y}\right)^{1990}$ .

(1990 China High School Math Contest).

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



Μιγαδικοί 46

[Μιγαδικοί 46](#)

47. Έστω  $z_i \in \mathbb{C}^*$  και  $z_i \neq z_j$  για κάθε  $i \neq j$ , με  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ . Αν είναι  $z_1^2 = z_2 z_3$ ,  $z_2^2 = z_1 z_3$  αποδείξτε ότι οι εικόνες των  $z_1, z_2, z_3$  είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 47

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=38294>

48. Έστω  $w \in \mathbb{C}$ , μη πραγματική ρίζα της εξίσωσης  $x^3 = 1$ . Να αποδείξετε ότι για κάθε  $z \in \mathbb{C}$  ισχύει:

$$|z-1|^2 + |z-w|^2 + |z-w^2|^2 = 3(1+|z|^2).$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 48

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=38295>

49. Αν  $a, b \in \mathbb{C}$  αποδείξτε ότι:  $|1+ab| + |a+b| \geq \sqrt{|a^2-1| \cdot |b^2-1|}$ .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 49

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=38297>

50. Έστω  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ . Αποδείξτε ότι:

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \cdot z_2 + \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \geq 0. \text{ [G.M. 2/2003].}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 50

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=38298>

51. Έστω  $z \in \mathbb{C}$  ώστε  $|z|=1$  και  $z^n + z + 1 = 0, n \in \mathbb{N}^*$ . Αποδείξτε ότι:

a.  $z^3 = 1$

b.  $n = 3k + 2, k \in \mathbb{N}$   
[G.M. 2/2003]

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 51

[mathematica.gr](http://mathematica.gr) • Προβολή θέματος - Μιγαδικοί 51

52. Έστω  $n \geq 3$  ακέραιος και οι μιγαδικοί  $z_0, z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$  διαφορετικοί ανά δύο και με ίσα μέτρα. Αποδείξτε ότι οι εικόνες των μιγαδικών

$\frac{1}{z_1 - z_0}, \frac{1}{z_2 - z_0}, \frac{1}{z_3 - z_0}, \dots, \frac{1}{z_n - z_0}$  είναι συνευθειακά σημεία.

[G.M. 2/2003]

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



Μιγαδικοί 52

[Μιγαδικοί 52](#)

53. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί  $z_1, z_2$  που ικανοποιούν τις σχέσεις:

- $3z_1^2 - 2z_1z_2 + 2z_2^2 = 0$  και
- $Re\left(\frac{z_1 - 2}{z_1 + 2}\right) = 0$ .

Εάν είναι  $A, B, O$  οι αντίστοιχες εικόνες των  $z_1, z_2, 0$  στο μιγαδικό επίπεδο, να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου  $ABO$ .

Rice University Math Tournament 2012

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 53

[Μιγαδικοί 53](#)

54. Αν  $z, w$  τυχαίοι μη μηδενικοί μιγαδικοί και  $\varepsilon = \cos\frac{\pi}{3} + i\eta\mu\frac{\pi}{3}$  αποδείξτε την ανισότητα  $|z - \varepsilon w| \leq |z| + |z - w|$ . [G.M. 10/2003].

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 54

[Μιγαδικοί 54](#)

55. Αποδείξτε ότι για κάθε μιγαδικό  $z$  ισχύει η σχέση  $|1 + z| + |1 + z + z^2| \geq 1$ .

[Διαγωνισμός «Victor Valcovici» Valcea, Romania 20/2/2004, το θέμα πρότεινε ο καθηγητής Laurentiu Panaitopol]

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 55

Μιγαδικοί 55

56. Έστω οι μιγαδικοί  $a, b, c, d, e, f$  τέτοιοι ώστε

$$|a| = |b| = |c| = r, |d| = |e| = |f| = R, 0 < r < R, a + b + c = d + e + f,$$

$a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2 + f^2$ . Αποδείξτε ότι τα τρίγωνα με κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών  $a, b, c$  και  $d, e, f$  είναι ισόπλευρα.

[Διαγωνισμός «Cezar Ionescu» Valcea, Romania 20/2/2004]

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 56

Μιγαδικοί 56

57. Βρείτε όλους τους μιγαδικούς  $z_1, z_2$  που ικανοποιούν συγχρόνως τις παρακάτω ισότητες:

$$|1 + z_1 + z_2| = |1 + z_1| = 1, |z_1 \cdot z_2 (z_1 + z_2)| = 2(|z_1| + |z_2|).$$

[Προτεινόμενη για Εθνική Ολυμπιάδα Ρουμανίας 2004]

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



Μιγαδικοί 57

Μιγαδικοί 57

58. Τρεις μιγαδικοί αριθμοί  $a, b, c$  έχουν μέτρο  $1$  και ικανοποιούν την ισότητα  $a + b + c = 1$ . Αποδείξτε, ότι:

A)  $ab + bc + ac = abc$

B)  $(1 - a)(1 - b)(1 - c) = 0$

Γ)  $\frac{1}{a^{2013}} + \frac{1}{b^{2013}} + \frac{1}{c^{2013}} = 1$

Δ) Αν οι  $a, b, c$  είναι διαφορετικοί ανά δύο, τότε το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των  $a, b, c$  είναι ορθογώνιο.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



Μιγαδικοί 58

Μιγαδικοί 58

59. Έστω οι μιγαδικοί  $a, b, c$  ώστε  $a + b + c = 0 = a^2 + b^2 + c^2$ . Αποδείξτε ότι:

A)  $ab + bc + ca = 0$

B)  $a^2 = bc$

Γ)  $abc \neq 0$  και  $|a| = |b| = |c|$

Δ) το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των  $a$  ,  $b$  ,  $c$  είναι ισόπλευρο.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 59

[Μιγαδικοί 59](#)

60. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  ώστε για κάθε  $i \in \{0, 1, 2\}$  να είναι  $|a_i| \leq 3$ . Αν ο μιγαδικός αριθμός  $v$  ικανοποιεί τη σχέση:

$$v^3 + \alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0 = 0 \text{ τότε να αποδείξετε ότι: } |v| < 4 .$$

Πανελλαδικές εξετάσεις 2013 Μάιος .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



ΑΠΑΝΤΗΣΗ 60

[Μιγαδικοί 60](#)