

Πρόβλημα 1

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και $\hat{A} = 30^\circ$. Στα σημεία A και Γ θεωρούμε τις εφαπτόμενες του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$ που τέμνονται στο Δ .

(α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Gamma\Delta$ είναι όμοια.

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ συναρτήσει της πλευράς $B\Gamma = \alpha$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

Πρόβλημα 2

(α) Να προσδιοριστούν οι παράμετροι $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε ο αριθμός 2 να είναι ρίζα των εξισώσεων:

$$\lambda x^3 - (\mu + 4)x - 2 = 0 \text{ και } \mu x^2 - 4x - \lambda - 2 = 0.$$

(β) Για τις τιμές των λ, μ που βρήκατε στο ερώτημα (α), να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{\lambda x^3 - (\mu + 4)x - 2}{\mu x^2 - 4x - \lambda - 2} = \frac{17}{8}.$$

Πρόβλημα 3

Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(f(x) - f(y)) = f(f(x)) - y, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R},$$

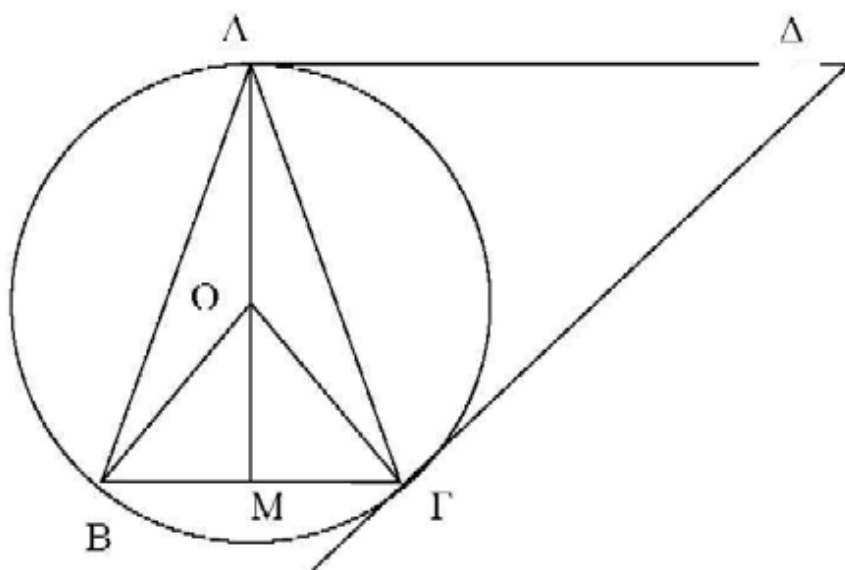
τότε να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.

Πρόβλημα 4

Για κάθε τρεις μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς a, b και c , που είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{c+a}{c-a}\right)^2 \geq 2.$$

1.



(α) Τα τρίγωνα $\Lambda\text{ΒΓ}$ και $\Delta\Lambda\Gamma$ είναι ισοσκελή ($\Delta\Lambda = \Delta\Gamma$, ως εφαπτόμενες από το Δ στον περιγεγραμμένο κύκλο) και έχουν $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}$, ως εντός εναλλάξ. Άρα είναι όμοια.

(β) Παρατηρούμε ότι $\widehat{BO\Gamma} = 2\hat{A} = 60^\circ$, οπότε το τρίγωνο $OB\Gamma$ είναι ισόπλευρο και ισχύει ότι $R = BI' = \alpha$.

Έστω η ΑΟ τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Μ. Επειδή είναι ΟΑ – ΟΒ και ΑΒ = ΑΓ η ΟΑ είναι η μεσοκάθετη της ΒΓ. Άρα είναι ΑΔ || ΒΓ και το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.

Επιπλέον από το τρίγωνο ΛΜΓ έχουμε $ΛΜ = α \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ και

$$Al'^2 = \left(\alpha + \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \frac{\alpha^2}{4} \Leftrightarrow Al' = \alpha\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

Επειδή τα ισοσκελή τρίγωνα $\Lambda\text{Β}\Gamma$ και $\Lambda\Delta\Gamma$ είναι όμοια ($\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}$), θα έχουμε

$$\frac{\Lambda\Delta}{\Lambda\Gamma} = \frac{\Lambda I'}{B\Gamma} \Leftrightarrow \Lambda\Delta = \frac{\Lambda I'^2}{B\Gamma} \Leftrightarrow \Lambda\Delta = \alpha(2 + \sqrt{3}).$$

Άρα είναι

$$(A|B|A) = \frac{\alpha + \alpha(2 + \sqrt{3})}{2} \cdot \frac{\alpha(2 + \sqrt{3})}{2} = \frac{\alpha^2(9 + 5\sqrt{3})}{4}$$

2. (α) Για να είναι το 2 κοινή ρίζα των δύο εξισώσεων πρέπει και αρκεί:

$$\begin{cases} 8\lambda - 2(\mu + 4) - 2 = 0 \\ 4\mu - 4 \cdot 2 - \lambda - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \mu = 3 \end{cases}.$$

(β) Για $\lambda=2$ και $\mu=3$ η δεδομένη εξίσωση γίνεται:

$$\frac{2x^3 - 7x - 2}{3x^2 - 4x - 4} = \frac{17}{8}.$$

Όμως έχουμε τις παραγοντοποιήσεις

$$\begin{aligned} 2x^3 - 7x - 2 &= (x-2)(2x^2 + 4x + 1) \\ 3x^2 - 4x - 4 &= (x-2)(3x+2). \end{aligned}$$

οπότε η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 + 4x + 1}{3x + 2} &= \frac{17}{8}, \quad x \in \mathbb{R} - \left\{2, -\frac{2}{3}\right\}. \\ \Leftrightarrow 16x^2 - 19x - 26 &= 0, \quad x \in \mathbb{R} - \left\{2, -\frac{2}{3}\right\} \\ \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x &= -\frac{13}{16}, \quad x \in \mathbb{R} - \left\{2, -\frac{2}{3}\right\} \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{13}{16}. \end{aligned}$$

3. Για $x = y = 0$ από τη δοσμένη συναρτησιακή σχέση (1) έχουμε:

$$\begin{aligned} f(f(0) - f(0)) &= f(f(0)) - 0 \\ \Leftrightarrow f(0) &= f(f(0)) \end{aligned} \quad (2)$$

Από τη δοσμένη συναρτησιακή σχέση (1) θέτοντας όπου y το $f(x)$ έχουμε:

$$f(f(x) - f(f(x))) = f(f(x)) - f(x) \quad (3)$$

Αν τώρα στη (3) θέσουμε $x = 0$ έχουμε:

$$f(f(0) - f(f(0))) = f(f(0)) - f(0)$$

και σε συνδυασμό με την (2) καταλήγουμε $f(f(0)) = f(0) = 0$.

Θέτοντας στην (1) όπου $x = 0$, έχουμε:

$$f(f(0) - f(y)) = f(f(0)) - y \text{ και δεδομένου ότι } f(f(0)) = f(0) = 0,$$

καταλήγουμε στη σχέση

$$f(-f(y)) = -y. \quad (4)$$

Θέτοντας στην (1) όπου y το x έχουμε:

$$\begin{aligned}f(f(x) - f(x)) &= f(f(x)) - x \Leftrightarrow f(0) = f(f(x)) - x \Leftrightarrow \\f(f(x)) &= x\end{aligned}\tag{5}$$

Αντικαθιστώντας στην (4) όπου y το $f(x)$, έχουμε:

$$f(-f(f(x))) = -f(x)$$

και σε συνδυασμό με την (5), καταλήγουμε στη σχέση

$$f(-x) = -f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

δηλαδή η f είναι περιττή.

4. Αν θέσουμε $x = \frac{a+b}{a-b}$, τότε λαμβάνουμε

$$\frac{a}{b} = \frac{x+1}{x-1}\tag{1}$$

(είναι $x \neq 1$, αφού $b \neq 0$). Ομοίως, αν θέσουμε $y = \frac{b+c}{b-c}$, $z = \frac{c+a}{c-a}$, τότε λαμβάνουμε

$$\frac{b}{c} = \frac{y+1}{y-1}\tag{2}$$

$$\text{και } \frac{c}{a} = \frac{z+1}{z-1}.\tag{3}$$

Από τις (1), (2) και (3) με πολλαπλασιασμό κατά μέλη λαμβάνουμε

$$\frac{(x+1)(y+1)(z+1)}{(x-1)(y-1)(z-1)} = \frac{abc}{bca} = 1 \Rightarrow xy + yz + zx = -1.$$

Όμως έχουμε

$$\begin{aligned}0 \leq (x+y+z)^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = x^2 + y^2 + z^2 - 2 \\&\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2 \geq 0 \\&\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq 2.\end{aligned}$$