

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Αν οι θετικοί ακέραιοι α και β έχουν 120 κοινούς θετικούς διαιρέτες, να προσδιορίσετε το πλήθος των κοινών θετικών διαιρετών των αριθμών

$$A = 4\alpha + 5\beta \text{ και } B = 3\alpha + 4\beta .$$

Λύση

Θα αποδείξουμε ότι τα σύνολα των θετικών ακέραιων κοινών διαιρετών των αριθμών α , β και των αριθμών A και B ταυτίζονται.

Έστω ότι ο θετικός ακέραιος δ είναι κοινός διαιρέτης των αριθμών α , β . Τότε από τις σχέσεις $\delta|\alpha$ και $\delta|\beta$ λαμβάνουμε ότι ο δ διαιρεί και κάθε γραμμικό συνδυασμό τους, οπότε

$$\delta|(4\alpha + 5\beta) = A \text{ και } \delta|(3\alpha + 4\beta) = B,$$

δηλαδή ο δ είναι κοινός διαιρέτης των A και B .

Αντίστροφα, έστω ότι ο θετικός ακέραιος δ είναι κοινός διαιρέτης των ακεραίων A και B . Τότε από τις υποθέσεις $\delta|A = 4\alpha + 5\beta$ και $\delta|B = 3\alpha + 4\beta$ έπεται ότι $\delta|A - B = \alpha + \beta$, οπότε προκύπτει ότι:

$$\delta|5(A - B) - A = \alpha \text{ και } \delta|A - 4(A - B) = \beta,$$

οπότε ο δ είναι κοινός διαιρέτης και των αριθμών α και β .

Επομένως και οι αριθμοί A και B έχουν 120 κοινούς θετικούς ακέραιους διαιρέτες.

2. Να προσδιορίσετε το πλήθος και το άθροισμα των άρτιων θετικών ακέραιων που βρίσκονται μεταξύ των αριθμών $A = n^2 - n + 1$ και $B = n^2 + n + 1$, όπου n θετικός ακέραιος.

Λύση

Έχουμε $A = n(n - 1) + 1$ και $B = n(n + 1) + 1$, οπότε και οι δύο αριθμοί είναι περιττοί, αφού τα γινόμενα διαδοχικών ακέραιων $n(n - 1)$ και $n(n + 1)$ είναι άρτιοι ακέραιοι. Επιπλέον, είναι $B - A = 2n > 0$, οπότε $A < B$. Έστω $A + 1, A + 3, \dots, A + (2\kappa - 1)$, όπου κ θετικός ακέραιος, οι άρτιοι ακέραιοι που βρίσκονται μεταξύ των περιττών A και B . Τότε πρέπει

$$A + (2\kappa - 1) = B - 1,$$

δηλαδή

$$B - A = 2\kappa \Leftrightarrow 2n = 2\kappa \Leftrightarrow \kappa = n.$$

Επομένως μεταξύ των αριθμών A και B βρίσκονται n άρτιοι ακέραιοι, οι οποίοι είναι οι $A + 1, A + 3, \dots, A + (2n - 1)$,

ενώ το άθροισμά τους είναι

$$\Sigma = nA + [1 + 3 + \dots + (2n - 1)] = n^3 - n^2 + n + \frac{(1 + 2n - 1) \cdot n}{2} = n^3 + n.$$

3. Να προσδιορίσετε τις τριάδες ακέραιων (x, y, z) με $x \geq y \geq z$ που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$xy(x - y) + yz(y - z) + zx(z - x) = 6.$$

Ποιες από τις τριάδες αυτές έχουν άθροισμα τετραγώνων ελάχιστο;

Λύση

Το πρώτο μέλος της δεδομένης εξίσωσης γράφεται:

$$\begin{aligned} xy(x - y) + yz(y - z) + zx(z - x) &= x^2y - xy^2 + y^2z - yz^2 + z^2x - zx^2 \\ &= xy(x - y) + (x - y)z^2 - (x^2 - y^2)z \\ &= (x - y)[xy + z^2 - xz - yz] \\ &= (x - y)[x(y - z) - z(y - z)] \\ &= (x - y)(y - z)(x - z). \end{aligned}$$

Άρα η δεδομένη εξίσωση γίνεται:

$$(x-y)(y-z)(x-z) = 6.$$

Από την τελευταία μορφή προκύπτει ότι οι ακέραιοι $x-y, y-z, x-z$ είναι διάφοροι από το 0. Επιπλέον από την υπόθεση $x \geq y \geq z$ έπεται ότι $x-y \geq 0$ και $x-z \geq y-z > 0$, και αφού οι θετικοί διαιρέτες του 6 είναι οι 1, 2, 3, 6, έπεται ότι οι δυνατές τιμές για τις διαφορές $x-y, y-z, x-z$, είναι:

$$x-y=1, y-z=2, x-z=3 \quad (1)$$

$$\text{ή } x-y=2, y-z=1, x-z=3 \quad (2)$$

$$\text{ή } x-y=1, y-z=1, x-z=6 \quad (3)$$

Επειδή η τρίτη εξίσωση προκύπτει με πρόσθεση κατά μέλη της πρώτης και της δεύτερης, η περίπτωση (3) δεν είναι αποδεκτή. Τα συστήματα (1) και (2) είναι αποδεκτά, αφού κάθε λύση του συστήματος της πρώτης και δεύτερης εξίσωσης είναι και λύση της τρίτης εξίσωσης, οπότε:

- Από το σύστημα (1) λαμβάνουμε:

$$x-y=1, y-z=2 \Leftrightarrow x=y+1, z=y-2,$$

όπου y θετικός ακέραιος. Έτσι έχουν προκύψει οι τριάδες θετικών ακέραιων

$$(x, y, z) = (k+1, k, k-2), \text{ όπου } k \text{ θετικός ακέραιος.}$$

- Από το σύστημα (2) λαμβάνουμε τελικά:

$$(x, y, z) = (k+2, k, k-1), \text{ όπου } k \text{ θετικός ακέραιος.}$$

Στην πρώτη περίπτωση οι τριάδες $(x, y, z) = (k+1, k, k-2), k \in \mathbb{Z}$, έχουν άθροισμα τετραγώνων

$$S = (k+1)^2 + k^2 + (k-2)^2 = 3k^2 - 2k + 5,$$

που είναι τριώνυμο ως προς k και έχει ελάχιστο για $k = \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$. Λόγω της μονοτονίας της συνάρτησης $S(k) = 3k^2 - 2k + 5$ εξετάζουμε τις τιμές της στους γειτονικούς ακέραιους του $\frac{1}{3}$ και έχουμε $S(0) = 5$ και $S(1) = 6$, οπότε η ελάχιστη τιμή του S λαμβάνεται για $k=0$ από την τριάδα $(x, y, z) = (1, 0, -2)$.

Στην δεύτερη περίπτωση οι τριάδες $(x, y, z) = (k+2, k, k-1), k \in \mathbb{Z}$, έχουν άθροισμα τετραγώνων

$$S = (k+2)^2 + k^2 + (k-1)^2 = 3k^2 + 2k + 5,$$

που είναι τριώνυμο ως προς k και έχει ελάχιστο για $k = -\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$. Λόγω της μονοτονίας της συνάρτησης $S(k) = 3k^2 + 2k + 5$ εξετάζουμε τις τιμές της στους γειτονικούς ακέραιους του $-\frac{1}{3}$ και έχουμε $S(0) = 5$ και $S(-1) = 6$, οπότε η ελάχιστη τιμή του S λαμβάνεται για $k=0$ από την τριάδα $(x, y, z) = (2, 0, -1)$.

Επομένως η ελάχιστη τιμή του αθροίσματος των τετραγώνων των μελών των τριάδων που ικανοποιούν την δεδομένη εξίσωση είναι 5 και λαμβάνεται από τις τριάδες

$$(x, y, z) = (1, 0, -2) \text{ και } (x, y, z) = (2, 0, -1).$$

4. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB . Θεωρούμε τυχόν σημείο M εκτός του AB και τέτοιο ώστε η κάθετη από το αυτό προς την ευθεία AB να την τέμνει σε εσωτερικό σημείο του

ευθύγραμμου τμήματος AB . Φέρουμε ευθύγραμμα τμήματα AG και BD τέτοια ώστε
 $AG \perp AM$ και $AG = 2 \cdot AM$, $BD \perp MB$ και $BD = 2 \cdot MB$

και επιπλέον τα σημεία M , Γ και Δ να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία AB . Να αποδείξετε ότι το μέσον K του ευθύγραμμου τμήματος $\Gamma\Delta$ είναι σταθερό σημείο, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου M .

Λύση

Από τα σημεία Γ , M και Δ φέρουμε καθέτους GE , MH και ΔZ προς την ευθεία AB . Τότε οι οξείες γωνίες $\hat{M}AH$ και $\hat{A}\hat{G}E$ έχουν πλευρές κάθετες, οπότε είναι ίσες. Για τον ίδιο λόγο είναι ίσες και οι γωνίες $\hat{M}BH$ και $\hat{B}\hat{\Delta}Z$. Έτσι τα ορθογώνια τρίγωνα AHM , GEA είναι όμοια, οπότε θα έχουμε:

$$\frac{GE}{AH} = \frac{AE}{MH} = \frac{AG}{AM} = 2,$$

οπότε προκύπτουν οι ισότητες:

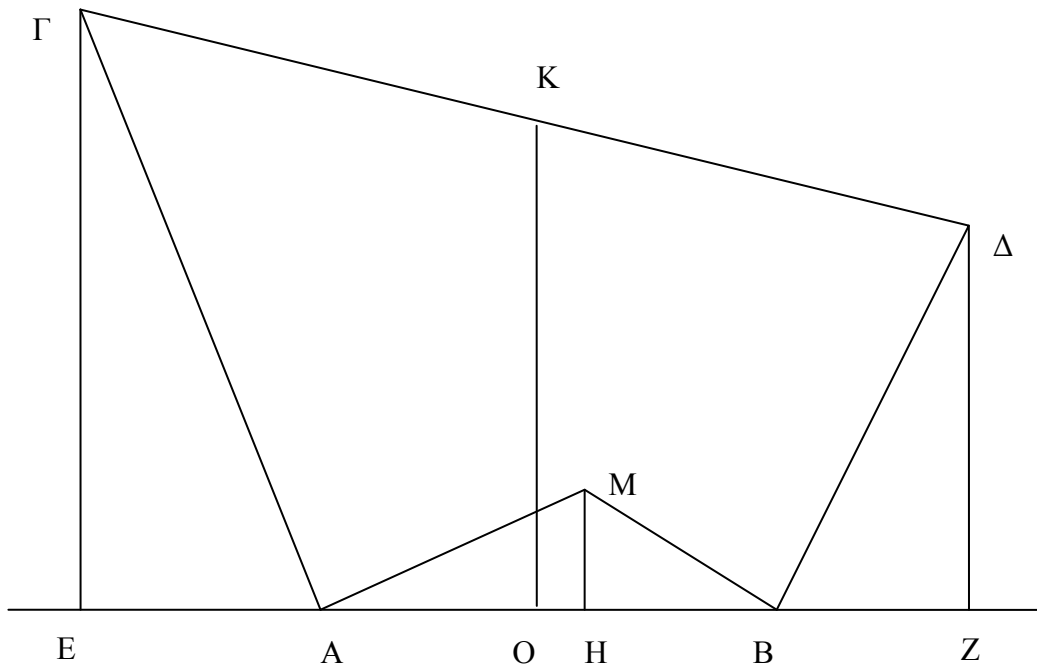
$$GE = 2 \cdot AH \quad (1)$$

$$EA = 2 \cdot MH. \quad (2)$$

Ομοίως τα ορθογώνια τρίγωνα MHB , $BZ\Delta$ είναι όμοια, οπότε ομοίως θα έχουμε:

$$\Delta Z = 2 \cdot HB \quad (3)$$

$$BZ = 2 \cdot MH. \quad (4)$$



Σχήμα 10

Έστω ότι η κάθετη από το μέσον K της $\Gamma\Delta$ τέμνει την ευθεία AB στο σημείο O . Τότε η KO θα είναι η διάμεσος του τραπεζίου $GEZ\Delta$, οπότε θα ισχύει:

$$OK = \frac{GE + \Delta Z}{2}. \quad (5)$$

Λόγω των (1) και (3) η σχέση (5) γίνεται

$$OK = \frac{\Gamma E + \Delta Z}{2} = \frac{2 \cdot AH + 2 \cdot HB}{2} = \frac{2 \cdot AB}{2} = AB. \quad (6)$$

Επιπλέον, το μέσον O της EZ είναι και μέσον της AB , αφού από τις σχέσεις (2) και (4) προκύπτει ότι $EA = BZ$, οπότε θα έχουμε

$$OA = OE - AE = OZ - BZ = OB. \quad (7)$$

Επομένως το σημείο K βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος AB σε απόσταση από το μέσον O ίση προς το AB . Άρα είναι σταθερό σημείο, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου M .

Παρατήρηση

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί με χρήση της γεωμετρικής αναπαράστασης των μιγαδικών αριθμών.