ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2013

ΖΗΤΗΜΑ Α

Α. α) Πότε δύο μιγαδικοί ονομάζονται συζυγείς; Ποια είναι η θέση των εικόνων δύο συζυγών μιγαδικών, μέσα στο επίπεδο Gauss; (1Χ2 μόρια)

β) Αν z_0, z_1, z_2 σταθεροί μιγαδικοί αριθμοί με $z_1 \neq z_2$ τι εκφράζουν οι εξισώσεις $|z-z_0|=r>0$ και $|z-z_1|=|z-z_2|$; (1Χ2 μόρια)

γ) Έστω συναρτήσεις $f:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$, $g:\mathrm{B}\to\mathbb{R}$. Πότε ισχύει $f=g$; (1 μόριο)

δ) Έστω συνάρτηση $f:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$.

δ_1) Πότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A ;

δ_2) Πότε η συνάρτηση έχει ελάχιστο στο A ;

δ_3) Πότε η συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη ;

δ_4) Πότε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ έχει νόημα; (1Χ4 μόρια)

Β. Να σημειώσετε με (Σ) τις σωστές και (Λ) τις λανθασμένες από τις παρακάτω προτάσεις.

α) Η εξίσωση $|z-z_1|+|z-z_2|=2\alpha,\ \alpha>0$, με z_1, z_2 σταθερούς μιγαδικούς, είναι εξίσωση έλλειψης.

β) Για κάθε ζεύγος μη μηδενικών μιγαδικών z, w για τους οποίους ισχύει $|z|=|w|$ οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο ταυτίζονται.

γ) Η συνάρτηση με τύπο $f(x)=x^2$ είναι αντιστρέψιμη με αντίστροφη την συνάρτηση με τύπο $g(x)=\sqrt{x}$.

δ) Υπάρχουν συναρτήσεις f, g τέτοιες ώστε να ισχύει $fog=gof$. (2Χ4 μόρια).

Γ. Για τους μιγαδικούς z_1, z_2 να δείξετε ότι

α) $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$

β) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ (2Χ4 μόρια)

ΖΗΤΗΜΑ Β

Έστω η εξίσωση $z^2-\left(2+2\sigma\upsilon\nu\theta\right)z+1+\sigma\upsilon\nu^2\theta=0,\ \theta\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ (1)

α. Να δείξετε ότι η (1) έχει δύο ρίζες μιγαδικές και συζυγείς. (7 μόρια)

β. Αν z_1, z_2 οι μιγαδικές ρίζες της (1), να βρείτε τη γραμμή στην οποία ανήκουν οι εικόνες των δύο ριζών. (11 μόρια)

γ. Να προσδιορίσετε τη μέγιστη τιμή του μέτρου $\left|z_1-z_2\right|$. (7 μόρια)

ΖΗΤΗΜΑ Γ

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f\left(x+f\left(y\right)\right)=f\left(x\right)+y+1$ για κάθε $x,\ y\in\mathbb{R}$ και έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

α. Η f είναι αντιστρέψιμη. (6 μόρια)

β. Ισχύει $f\left(2x\right)=f\left(x\right)+f^{-1}\left(x\right)+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (10 μόρια)

γ. Η f δεν είναι περιττή συνάρτηση. (5 μόρια)

δ. $f\left(-1\right)=0$. (4 μόρια)

ΖΗΤΗΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση $f:\left(0,\ +\infty\right)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f\left(x\right)-f\left(y\right)=f\left(\frac{x}{y}\right)$ για κάθε $x,\ y>0$ και η εξίσωση $f\left(x\right)=0$ έχει μοναδική λύση.

α. Να βρείτε το $f\left(1\right)$. (4 μόρια)

β. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη. (6 μόρια)

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f\left(x^2-2\right)+f\left(x\right)=f\left(5x-6\right)$. (7 μόρια)

δ. Αν $f\left(x\right)<0$ για κάθε $x>1$, να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα (8 μόρια)