

Χρήσιμες Προτάσεις

Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

21 Νοεμβρίου 2009

Περίληψη

Παρακάτω περιλαμβάνονται μερικές προτάσεις, μικρά λήμματα χρήσιμα για τις εξετάσεις στο μάθημα κατεύθυνσης της Γ' Λυκείου.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

ΑΝ ΚΑΠΟΙΑ ΠΡΟΤΑΣΗ ΑΠΟ ΤΙΣ ΕΠΟΜΕΝΕΣ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΗΘΕΙ ΧΡΕΙΑΖΕΤΑΙ ΑΠΟΔΕΙΞΗ.
ΕΞΑΙΡΕΣΗ ΑΠΟΤΕΛΟΥΝ ΟΙ (3), (13), (21)

ΠΡΟΤΑΣΗ 1. Ένας μιγαδικός είναι πραγματικός αν και μόνο αν είναι ίσος με τον συζυγή του.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Αν $z = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τότε $z - \bar{z} = 2\beta i$ και επομένως

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \beta = 0 \Leftrightarrow z - \bar{z} = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 2. Αν μία συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοικτό διάστημα (σ_1, σ_2) έχει την ιδιότητα $\lim_{x \rightarrow \sigma_1} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \sigma_2} f(x) = +\infty$ τότε το σύνολο τιμών της είναι το $\mathbb{R}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε πραγματικός αριθμός y είναι τιμή της f . Αφού $\lim_{x \rightarrow \sigma_1} f(x) = -\infty$ η f θα παίρνει και τιμές μικρότερες του y δηλαδή θα υπάρχει $x_1 \in (\sigma_1, \sigma_2)$ ώστε $f(x_1) < y$. Αφού $\lim_{x \rightarrow \sigma_2} f(x) = +\infty$ η f θα παίρνει και τιμές μεγαλύτερες του y δηλαδή θα υπάρχει $x_2 \in (\sigma_1, \sigma_2)$ ώστε $y < f(x_2)$. Προφανώς $x_1 \neq x_2$ και από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών θα υπάρχει x στο διάστημα με άκρα τα x_1, x_2 τέτοιο ώστε $f(x) = y$. Επομένως ο y είναι τιμή της f .

ΠΡΟΤΑΣΗ 3. Για κάθε $x > 0$ είναι

$$\ln x \leq x - 1$$

και το « $\Rightarrow$ » ισχύει μόνο για $x = 1$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Εφαρμογή του σχολικού βιβλίου.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4. Για κάθε x είναι

$$e^x \geq x + 1$$

και το « $\Rightarrow$ » ισχύει μόνο για $x = 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Για όλους τους θετικούς αριθμούς x ισχύει

$$\ln x \leq x - 1$$

και το « $\Rightarrow$ » ισχύει μόνο για $x = 1$. Επομένως και για τον θετικό e^x ισχύει $\ln e^x \leq e^x - 1$ και το « $\Rightarrow$ » ισχύει μόνο για $e^x = 1$ δηλαδή $x = 0$. Επομένως $x \leq e^x - 1$ και το « $\Rightarrow$ » ισχύει μόνο για $x = 0$. Άρα $e^x \geq x + 1$ και το « $\Rightarrow$ » ισχύει μόνο για $x = 0$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες στο διάστημα Δ και ισχύει $|g(x)| < m$ για όλα τα $x \in \Delta$ και $\lim_{x \rightarrow \sigma} f(x) = 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow \sigma} f(x)g(x) = 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Είναι:

$$|f(x)g(x)| = |f(x)| |g(x)| \leq |f(x)| m$$

Άρα για όλα τα x ισχύει

$$|f(x)g(x)| \leq |f(x)| m$$

και επομένως

$$-|f(x)| m \leq f(x)g(x) \leq |f(x)| m$$

Αλλά αφού $\lim_{x \rightarrow \sigma} f(x) = 0$ είναι και $\lim_{x \rightarrow \sigma} |f(x)| = 0$ επομένως

$$\lim_{x \rightarrow \sigma} m |f(x)| = \lim_{x \rightarrow \sigma} (-m |f(x)|) = 0 \quad (1)$$

Από την (1) και το κριτήριο της παρεμβολής συνάγουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow \sigma} f(x)g(x) = 0$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 6. Η συνάρτηση $|x|$ έχει για $x \neq 0$ παράγωγο $\frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x}$ ενώ στο 0 δεν παραγωγίζεται.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Το ότι δεν παραγωγίζεται στο 0 είναι γνωστό. Επίσης για $x > 0$ είναι $(|x|)' = (x)' = 1 = \frac{x}{x} = \frac{|x|}{x}$. Ακόμη για $x < 0$ είναι $(|x|)' = (-x)' = -1 = \frac{x}{-x} = \frac{x}{|x|}$. Άρα για $x \neq 0$ είναι $(|x|)' = \frac{x}{|x|}$ και προφανώς ισχύει $\frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x}$ διότι $x^2 = |x|^2$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 7. Αν $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και $f(\alpha)f(\beta) \leq 0$ τότε η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[\alpha, \beta]$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Αφού ισχύει $f(\alpha)f(\beta) \leq 0$ ή θα είναι $f(\alpha)f(\beta) < 0$ είτε $f(\alpha)f(\beta) = 0$.



- Αν $f(\alpha)f(\beta) < 0$ τότε από το θεώρημα του Bolzano η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) και επομένως στο $[\alpha, \beta]$.
- Αν $f(\alpha)f(\beta) = 0$ τότε ή $f(\alpha) = 0$ είτε $f(\beta) = 0$. Άρα η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\{\alpha, \beta\}$ και επομένως στο $[\alpha, \beta]$. Σε κάθε περίπτωση η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[\alpha, \beta]$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 8. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα τότε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων της f και της αντίστροφής της f^{-1} , εφ' όσον υπάρχουν, ανήκουν στην ευθεία $y = x$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω $M(\alpha, \beta)$ ένα σημείο που ανήκει και στην $\mathcal{C}_f$ και $\mathcal{C}_{f^{-1}}$. Θα ισχύει $f(\alpha) = \beta$ και $f(\beta) = \alpha$. Θα δείξουμε ότι το M ανήκει και στην $y = x$ δηλαδή ότι $\alpha = \beta$.

Αν είναι $\alpha \neq \beta$ τότε ή θα είναι $\alpha < \beta$ είτε $\beta < \alpha$. Στην πρώτη περίπτωση θα έχουμε $f(\alpha) < f(\beta)$ δηλαδή $\beta < \alpha$ (άτοπο). Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε ότι $f(\beta) < f(\alpha)$ δηλαδή $\alpha < \beta$ (άτοπο). Άρα αποκλείεται να είναι $\alpha \neq \beta$ και απομένει ότι $\alpha = \beta$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 9. Έστω $f : [-\alpha, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής.

1. Αν η f είναι άρτια τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 2 \int_0^{\alpha} f(x) dx$
2. Αν η f είναι περιττή τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Είναι

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = \int_{-\alpha}^0 f(x) dx + \int_0^{\alpha} f(x) dx \stackrel{u=-x}{=} \int_{\alpha}^0 f(-u) du + \int_0^{\alpha} f(x) dx = \int_0^{\alpha} f(-x) dx + \int_0^{\alpha} f(x) dx$$

Όταν η f είναι άρτια τότε $f(-x) = f(x)$ και $\int_0^{\alpha} f(-x) dx + \int_0^{\alpha} f(x) dx = \int_0^{\alpha} f(x) dx + \int_0^{\alpha} f(x) dx = 2 \int_0^{\alpha} f(x) dx$.

Όταν η f είναι περιττή τότε $f(-x) = -f(x)$ και $\int_0^{\alpha} f(-x) dx + \int_0^{\alpha} f(x) dx = -\int_0^{\alpha} f(x) dx + \int_0^{\alpha} f(x) dx = 0$

ΠΡΟΤΑΣΗ 10. Η συνάρτηση $x \ln x - x$ είναι μία παράγουσα της $\ln x$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Προφανώς ισχύει $(x \ln x - x)' = (x \ln x)' - (x)' = (x)' \ln x + x(\ln x)' - (x)' = \ln x + x \frac{1}{x} - 1 = \ln x$

ΠΡΟΤΑΣΗ 11. $(\varepsilon \varphi x)' = 1 + \varepsilon \varphi^2 x$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Είναι $(\varepsilon \varphi x)' = \frac{1}{\sigma \nu \nu^2 x}$ και από γνωστή σχέση της τριγωνομετρίας είναι $\frac{1}{\sigma \nu \nu^2 x} = 1 + \varepsilon \varphi^2 x$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 12. Με $z \in \mathbb{C}$ ισχύει $|z|^2 = z^2$ αν και μόνο αν $z \in \mathbb{R}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω $z = \alpha + \beta i$. Είναι $|z|^2 = z^2 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta i)^2 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i \Leftrightarrow (\alpha^2 + \beta^2 = \alpha^2 - \beta^2 \text{ και } 2\alpha\beta = 0) \Leftrightarrow (2\beta^2 = 0 \text{ και } \alpha\beta = 0) \Leftrightarrow \beta = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

ΠΡΟΤΑΣΗ 13. Έστω ότι ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο σ . Ισχύουν τα επόμενα:



- $\lim_{x \rightarrow \sigma} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \sigma} g(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow \sigma} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \sigma} f(x) = -\infty$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Πρόκειται για άμεση συνέπεια του ορισμού του ορίου. Ισχύει κατ' αναλογία με τις ιδιότητες των πεπερασμένων ορίων ¹

ΠΡΟΤΑΣΗ 14. Αν για τις συναρτήσεις f, g που είναι ορισμένες και συνεχείς στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ ισχύει $f(x) \geq g(x)$ για όλα τα x και $f \neq g$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Για την συνάρτηση $h = f - g$ ισχύει $h(x) \geq 0$ για όλα τα x και $h \neq 0$. Επομένως $\int_{\alpha}^{\beta} h(x) dx > 0$ από την οποία έχουμε $\int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx > 0$ άρα και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx > 0$ από την οποία προκύπτει ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 15. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ τότε μεταξύ δύο οποιωνδήποτε διαφορετικών ριζών της f βρίσκεται μία τουλάχιστον ρίζα της παραγώγου της f' .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω $\rho_1 < \rho_2$ δύο ρίζες της f στο Δ . Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ και ισχύει $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$. Ικανοποιούνται επομένως οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle άρα θα υπάρχει ξ με $\rho_1 < \xi < \rho_2$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 16. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα και $f(x_1) < f(x_2)$ τότε είναι $x_1 < x_2$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Για τους x_1, x_2 υπάρχουν τα ενδεχόμενα: $x_1 = x_2$, $x_1 > x_2$ και $x_1 < x_2$. Το πρώτο μας οδηγεί στο άτοπο συμπέρασμα $f(x_1) = f(x_2)$. Το δεύτερο, σε συνδυασμό με το ότι η f είναι γνησίως αύξουσα μας οδηγεί στο επίσης άτοπο συμπέρασμα $f(x_1) > f(x_2)$. Άρα αναγκαστικά θα ισχύει $x_1 < x_2$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 17. Μία γνησίως μονότονη συνάρτηση έχει το πολύ μία ρίζα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω f μία γνησίως μονότονη συνάρτηση. Τότε η f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα και σε κάθε περίπτωση είναι 1-1. Αν ρ_1, ρ_2 είναι ρίζες της f τότε $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$ και από την σχέση $f(\rho_1) = f(\rho_2)$ συνάγουμε ότι $\rho_1 = \rho_2$. Επομένως η f έχει το πολύ μία ρίζα.

ΠΡΟΤΑΣΗ 18. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα τότε και η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω $y_1, y_2 \in \mathcal{D}_{f^{-1}}$ τέτοια ώστε $y_1 < y_2$. Θα δείξουμε ότι $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f$ έτσι ώστε $f(x_1) = y_1$ και $f(x_2) = y_2$ θα είναι δε $f^{-1}(y_1) = x_1$ και $f^{-1}(y_2) = x_2$. Ξέρουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$ και θέλουμε $x_1 < x_2$. Η απόδειξη συμπληρώνεται επιχειρηματολογώντας όπως ακριβώς στην πρόταση (16.).

¹ Βλ. σχολικό βιβλίο αρχή της σελίδας 184



ΠΡΟΤΑΣΗ 19. Αν $|z| = \rho \neq 0$ τότε $\bar{z} = \frac{\rho^2}{z}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Αφού $|z| \neq 0$ είναι και $z \neq 0$. Έχουμε τώρα: $|z| = \rho \Rightarrow |z|^2 = \rho^2 \Rightarrow z \cdot \bar{z} = \rho^2 \Rightarrow \bar{z} = \frac{\rho^2}{z}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 20. Αν $z \in \mathbb{C}$ με $z \notin \mathbb{R}$ τότε

$$z^3 = 1 \Leftrightarrow z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $z^3 = 1 \Leftrightarrow z^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow z^3 - 1^3 = 0 \Leftrightarrow (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0 \Leftrightarrow_{z \notin \mathbb{R}} z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow_{(\text{ΕΠΙΛΥΟΥΜΕ})} z = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$

ΠΡΟΤΑΣΗ 21. Οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f' = f$ είναι ακριβώς εκείνες της μορφής $f(x) = ce^x$ όπου $c \in \mathbb{R}$ σταθερά.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Εφαρμογή του σχολικού βιβλίου.

ΠΡΟΤΑΣΗ 22. Αν $\lim_{x \rightarrow \sigma} |f(x)| = 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow \sigma} f(x) = 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Από την ανισότητα $-|A| \leq A \leq |A|$ έχουμε ότι για κάθε x ισχύει

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow \sigma} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow \sigma} (-|f(x)|) = 0$ και από το κριτήριο της παρεμβολής έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow \sigma} f(x) = 0$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 23. Αν για μία παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει $f'(x) \geq 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ τότε η f είναι αύξουσα στο Δ .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Είναι όμοια με την ανάλογη απόδειξη του σχολικού βιβλίου για την περίπτωση όπου η παράγωγος είναι θετική. Το μόνο που αλλάζει είναι η τελευταία γραμμή:

«Επειδή $f'(\xi) \geq 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ οπότε $f(x_1) \leq f(x_2)$ »

ΠΡΟΤΑΣΗ 24. Μία γνησίως μονότονη συνάρτηση f ορισμένη σε ένα ανοικτό διάστημα Δ δεν έχει ακρότατα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Ας υποθέσουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα (η περίπτωση όπου η f είναι γνησίως φθίνουσα αντιμετωπίζεται αναλόγως). Αν πάρουμε ένα οποιοδήποτε σημείο $x_0 \in \Delta$. Για κάθε $\delta > 0$ το σύνολο $\Delta \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ περιέχει ένα τουλάχιστον $x_1 < x_0$ και ένα τουλάχιστον $x_2 > x_0$. Λόγω της μονοτονίας θα είναι $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Άρα δεν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για όλα τα $x \in \Delta \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να ισχύει $f(x) \leq f(x_0)$ είτε για όλα τα $x \in \Delta \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να ισχύει $f(x) \geq f(x_0)$. Άρα κανένα x_0 δε μπορεί να είναι θέση τοπικού ακροτάτου.

