Η αρχή του Αναλλοίωτου-Θεωρία Παιγνίων

Ομιλητής: Νασιούλας Αντώνης

Ιστιαία, Σάββατο 13 Απριλίου 2013

Μέρος I (Αναλλοίωτα)

Η Αρχή του Αναλλοίωτου είναι μια στρατηγική επίλυσης προβλήματων που έχουν σχέση με μετασχηματισμούς, επαναληπτικές διαδικασίες, παιχνίδια κτλ.

Με τον όρο αναλλοίωτο στα μαθηματικά εννοούμε μια ποσότητα ή μια ιδιότητα που δεν μεταβάλλεται.

Παράδειγμα: έστω το σύνολο $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ με άθροισμα στοιχείων $S = 55$, περιττό. Αν διαγράψουμε δυο άρτιους ή δυο περιττούς, τότε το S παραμένει περιττό. Εδώ, το αναλλοίωτο είναι η ιδιότητα του S να παραμένει περιττός.

Ορισμένα χαρακτηριστικά αναλλοίωτα:

- Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός αριθμού με τον ακέραιο αριθμό $\kappa \in \mathbb{Z}^*$. (Ειδικότερα αν $\kappa = 2$, το αν ένας αριθμός είναι άρτιος ή περιττός.)
- Η τιμή μιας αλγεβρικής παράστασης που περιέχει μεταβλητές.
- Αν ένα μέγεθος αυξάνεται ή μειώνεται.

Γενικά, μια οδηγία που θα μπορούσε να σας δώσει κάποιος είναι:

«Αν υπάρχει κάποια επαναληπτική διαδικασία, ψάξτε να βρείτε τι δεν αλλάζει…»

Η Αρχή του Αναλλοίωτου είναι μια μέθοδος που μαθαίνεται καλύτερα με την εμπειρία, λίγη από την οποία θα αποκτήσουμε λύνοντας ορισμένα όμορφα προβλήματα. Πριν πάμε όμως σε αυτά, να κάνουμε κάποιες υπενθυμίσεις από την Θεωρία Αριθμών.

Υπενθυμίσεις από την Θεωρία Αριθμών

- Άρτιοι-περιττοί

  - άρτιος $\pm$ άρτιος$\rightarrow$ άρτιος
  - περιττός $\pm$ περιττός $\rightarrow$ άρτιος
  - άρτιος $\pm$ περιττός $\rightarrow$ περιττός
  -

Γενικότερα, αν ένα άθροισμα ακέραιων αριθμών αποτελείται από:

- <u>περιττό</u> πλήθος περριτών αριθμών, τότε είναι <u>περιττό</u>.
- <u>άρτιο</u> πλήθος περιττών αριθμών, τότε είναι <u>άρτιο</u>.

Ορισμός: η αρτιότητα (parity) ενός ακέραιο αριθμού μας λέει αν είναι άρτιος ή περιττός.

Πρόταση 1: όταν ένας αριθμός μεταβάλλεται κατά άρτιο αριθμό, τότε διατηρεί την αρτιότητά του.

Πρόταση 2: η αρτιότητα ενός αθροίσματος ακέραιων αριθμών εξαρτάται από το πλήθος των περιττών όρων του.

- Διαιρετότητα

Αν σε μια σχέση $\alpha = \beta + \gamma$, ο δ διαιρεί δυο από τους α, β, γ, τότε θα διαιρεί και τον τρίτο. ($\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}$)

Πρόβλημα 1

Εκφώνηση: έχουμε στον πίνακα γραμμένο τον αριθμό 1940. Από τον αριθμό αυτό μπορούμε να πάρουμε νέους αριθμούς προσθέτοντας ή αφαιρώντας κάθε φορά στον προηγούμενο έναν από τους αριθμούς 8 ή 22. Μπορούμε με αυτόν τον τρόπο να πάρουμε τον αριθμό 2013;

Στρατηγική 1: «λερώστε τα χέρια σας» (get your hands dirty)

Μην φοβάστε να δοκιμάστε. Πιάστε χαρτί και μολύβι και ξεκινήστε να κάνετε δοκιμές. Πειραματιστείτε με συγκεκριμένα αριθμητικά παραδείγματα και αυτό μπορεί να σας οδηγήσει σε μια εικασία. Εξετάστε αν αυτή η εικασία σας βοηθάει στην λύση. Αν ναι, προσπαθείστε να αποδείξτε την εικασία που μόλις κάνατε…

$$\boxed{1940} \xrightarrow{+8} \boxed{1948} \xrightarrow{+22} \boxed{1970} \xrightarrow{-8} \boxed{1962} \xrightarrow{+22} \boxed{1984} \cdots$$

Τα γαλάζια κουτάκια έχουν όλα άρτιο περιοχόμενο. Μας οδηγεί αυτό στην λύση; Μπορείτε να το αποδείξετε;

Στρατηγική 2: «μπείτε στο μυαλό του κατασκευαστή»

Πρέπει πάντα να αναρωτιέστε γιατί ο κατασκευαστής επέλεξε τον συγκεκριμένο αριθμό. Ποια ιδιότητα τον κάνει να ξεχωρίζει; Η αρτιότητά του; Μήπως είναι πρώτος, τέλειο τετράγωνο, της μορφής $8\lambda + 1$, της μορφής…;

Λύση: γνωρίζουμε ότι, όταν προσθέτουμε ή αφαιρούμε δυο αρτίους, τότε προκύπτει πάλι άρτιος αριθμός. Επομένως από τον άρτιο 1940 δεν θα μπορέσουμε πότε να φτάσουμε στον περιττό 2013, προσθέτοντας και αφαιρώντας τους άρτιους 8,22.

Σχόλιο: στο συγκεριμένο πρόβλημα η επαναληπτική διαδικασία ήταν οι διαδοχικές προσθέσεις και αφαιρέσεις. Το αναλλοίωτο ήταν η αρτιότητα του αριθμού που προέκυπτε κάθε φορά (ήταν πάντα άρτιος).

Πρόβλημα 2

Εκφώνηση: πάνω σε ένα τραπέζι υπάρχουν 7 ποτήρια σε θέση στραγγίσματος (κάτω). Με κάθε κίνηση επιτρέπεται να αντιστρέψουμε ακριβώς 4 ποτήρια. Είναι δυνατόν με αυτή τη διαδικασία να αντιστρέψουμε όλα τα ποτήρια, ώστε να είναι σε θέση σερβιρίσματος (πάνω);

Πάνω(Π)

Κάτω(Κ)

Ας «λερώσουμε» τα χέρια μας…

							#Κ	#Π
Κ	Κ	Κ	Κ	Κ	Κ	Κ	7	0
		4	↓	0				
Κ	Κ	Κ	Π	Π	Π	Π	3	4
		3	↓	1				
Π	Π	Π	Κ	Π	Π	Π	1	6
		0	↓	4				
Κ	Κ	Κ	Κ	Κ	Π	Π	5	2
		2	↓	2				
Π	Π	Κ	Κ	Κ	Κ	Κ	5	2

Παρατηρούμε ότι τα κόκκινα κουτάκια έχουν όλα άρτιο περιεχόμενο. Μας βοηθάει αυτό στην λύση…; Μπορούμε να το αποδείξουμε;

Λύση 1η: έστω ότι επιλέγουμε να αντιστρέψουμε n ποτήρια που βρίσκονται σε θέση Κ, όπου $n = 0,1,2,3,4$. Τότε αναγκαστικά θα αντιστρέψουμε $4 - n$ ποτήρια που βρίσκονται σε θέση Π. Σε αυτήν την περίπτωση το #Π μεταβάλλεται ως εξής:

$$\#\Pi \leftarrow \#\Pi + \underbrace{\mathrm{n}}_{\text{Τα Κ που έγιναν Π}} - \underbrace{(4-\mathrm{n})}_{\text{Τα Π που έγιναν Κ}} = \#\Pi + \mathrm{n} - 4 + \mathrm{n} = \#\Pi + \underbrace{2\mathrm{n} - 4}_{\text{άρτιος}}$$

Άρα το #Π μεταβάλλεται κάθε φορά κατά άρτιο αριθμό. Αρχικά είναι ίσο με 0 (άρτιος). Άρα το #Π θα είναι συνεχώς άρτιο και δεν θα μπορέσει να γίνει ίσο με 7. Επομένως δεν είναι δυνατό να συμβεί το ζητούμενο.

Σχόλιο 1: στο πρόβλημα αυτό η επαναληπτική διαδικασία ήταν το γύρισμα των 4 ποτηριών. Το αναλλοίωτο ήταν ότι το πλήθος των ποτηριών που βρίσκονταν σε θέση σερβιρίσματος (Π) ήταν πάντα άρτιο, ανεξάρτητα από τις κινήσεις μας.

Σχόλιο 2: σε ορισμένα προβλήματα ενδέχεται να υπάρχουν περισσότερα από ένα αναλλοίωτα – χωρίς απαραίτητα να σημαίνει ότι όλα θα είναι χρήσιμα στην λύση. Για παράδειγμα, στο συγκεκριμένο πρόβλημα, αναλλοίωτη παραμένει και η αρτιότητα του πλήθος των ποτηριών που βρίσκονται σε θέση στραγγίσματος(Κ) (κάτι που θα μπορούσε να μας οδηγήσει επίσης στην λύση).

Σχόλιο 3: αν είχαμε 2013 ποτήρια σε θέση Κ και γυρίζαμε κάθε φορά 94 ακριβώς, θα μπορούσαμε να φέρουμε όλα τα ποτήρια σε θέση Π;
Γενικεύστε και γράψτε την απόδειξη της γενίκευσης.

Λύση 2η: «κοιτώντας το κάθε ποτήρι ξεχωριστά»

‘Ενα ποτήρι βρίσκεται σε θέση Π, αν το έχουμε γυρίσει περιττό αριθμό φορών.

Αν είναι δυνατόν να γυρίσουμε τα 7 ποτήρια σε θέση Π, τότε για το $1o$ ποτήρι θα έχουνε χρειαστεί α_1 γυρίσματα, για το $2o$ ποτήρι $\alpha_2,\dots$, για το $7o$ ποτήρι α_7 γυρίσματα, όπου α_1, $\alpha_2, \dots, \alpha_7$ περιττοί αριθμοί. Συνολικά θα έχουν γίνει $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_7$ γυρίσματα, περιττός αριθμός γυρισμάτων (ως άθροισμα 7 περιττών αριθμών).

Όμως σε κάθε γύρο γυρίζουμε 4 ποτήρια ακριβώς. Άρα ο τελικός αριθμός γυρισμάτων θα πρέπει να είναι $πολ4$. Δηλαδή θα πρέπει ένας περιττός αριθμός να είναι ίσος με ένα $πολ4$, το οποίο είναι φανερά άτοπο. Άρα το ζητούμενο δεν γίνεται.

Στα προηγούμενα παραδείγματα ήταν προφανές ποια ήταν η ποσότητα της οποίας κάποια ιδιότητα παραμένει αναλλοίωτη, μιας και σχετίζονταν άμεσα με το ζητούμενο. Υπάρχουν όμως και προβλήματα στα οποία θα πρέπει εμείς να ανακαλύψουμε ποια ποσότητα παραμένει αναλλοίωτη. Το βήμα αυτό όχι μόνο προφανές δεν είναι, αλλά πολλές φορές είναι και εξαιρετικά δύσκολο. Απαιτεί φαντασία, άλλα και αρκετή εμπειρία.

Πρόβλημα 3

Εκφώνηση: στον πίνακα είναι γραμμένοι οι αριθμοί από τον 1 έως τον 50. Διαγράφουμε τυχαία δύο από αυτούς και γράφουμε στον πίνακα τη θετική διαφορά τους. (Για παράδειγμα, αν διαγράψουμε τους αριθμούς 21 και 30, γράφουμε τον 9.) Να εξετάστε αν μετά από διαδοχικές εφαρμογές της παραπάνω διαδικασίας μπορεί να προκύψει ο αριθμός 0 (μηδέν).

Βήματα για την λύση:

- *Βήμα 1:* θεωρούμε το άθροισμα S όλων των αριθμών που βρίσκονται στον πίνακα, ελπίζοντας ότι κάποια ιδιότητά του θα παραμένει αναλλοίωτη.

- *Βήμα 2*: εξετάζουμε πώς μεταβάλλεται το S.
  Έστω ότι διαγράφουμε τους a, b με $a \leq b$. Τότε το S γίνεται

$$S \leftarrow S \underbrace{- a - b}_{\text{Διαγράφηκαν}} + \underbrace{b - a}_{\text{Προστέθηκε η θετική διαφορά τους}} = S - 2a$$

Άρα το S μεταβάλλεται κάθε φορά κατά άρτιο αριθμό, δηλαδή διατηρεί την αρτιότητά του.

- *Βήμα 3*: αναζητούμε την αρτιότητα του S αρχικά.

  1ος τρόπος: υπολογισμός του S (με τη συμμετρία των «άκρων»)

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 48 + 49 + 50$$
$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 48 + 49 + 50$$
$$S = (1 + 50) + (2 + 49) + (3 + 48) + \cdots + (25 + 26)$$
$$S = \underbrace{51 + 51 + 51 + \cdots + 51}_{\text{25-όροι}}$$
$$S = 25 \cdot 51 = 1275 \;\; (\text{περιττός})$$

  2ος τρόπος: άμεσος προσδιορισμός της αρτιότητας του S

Η αρτιότητα του S εξαρτάται από το πλήθος των περιττών όρων του.
Άρα μας αρκεί να προσδιορίσουμε το πλήθος των 1,3,5, … ,49.
Οι αριθμοί 1,2,3,4, … ,49,50 είναι 50 το πλήθος.
Οι περιττοί είναι ακριβώς οι μισοί (25) από αυτούς, αρκεί να παρατηρήσει κανείς ότι μπορούμε να τους ομαδοποιήσουμε στα ζεύγη (1,2), (3,4), (5,6), … , (49,50) καθένα από τα οποία περιέχει ακριβώς ένα περιττό.
Άρα το S αποτελείται από περιττό (25) πλήθος περιττών όρων, άρα είναι και το ίδιο περιττό.

- *Βήμα 4*: συνδυασμός των μέχρι τώρα αποτελεσμάτων.

Έχουμε δείξει ότι αρχικά το άθροισμα είναι περιττό και ότι, επειδή μειώνεται κάθε φορά κατά άρτιο αριθμό, θα παραμένει περιττό, ανεξάρτητα από τους ποιους αριθμούς θα επιλέξουμε να διαγράψουμε.

Αυτό μας οδηγεί στην λύση… αν προκύψει ο αριθμός 0 (μηδέν) θα πρέπει το S εκείνη τη στιγμή να είναι 0, δηλαδή άρτιο. Πράγμα που, όπως δείξαμε, δεν γίνεται.

Σχόλιο: στο πρόβλημα αυτό η επαναληπτική διαδικασία ήταν η διαγραφή δυο αριθμών και η αντικατάστασή τους με την θετική διαφορά τους. Το αναλλοίωτο ήταν η αρτιότητα του αθροίσματος των αριθμών. Σημειώστε ότι το άθροισμα δεν αναφέρεται πουθενά στην εκφώνηση, αλλά το θεωρήσαμε μόνοι μας.

Πρόβλημα 4

Εκφώνηση: δίνονται 10 σημεία σε έναν κύκλο. Ένα από αυτά χαρακτηρίζουμε 1 και τα υπόλοιπα με 0. Κάθε φορά μπορούμε να κάνουμε την εξής ενέργεια:
Επιλέγουμε ένα σημείο με χαρακτηρισμό 1 και μετατρέπουμε τα δυο γειτονικά του σημεία σε $1-\alpha, 1-\beta$, όπου α, β είναι οι προηγούμενοι χαρακτηρισμοί. Να εξετάσετε αν, μετά από διαδοχικές εφαρμογές της παραπάνω διαδικασίας, όλα τα σημεία μπορούν να χαρακτηριστούν με 1.

Βήματα για την λύση:

- *Βήμα 1:* θεωρούμε το άθροισμα S όλων χαρακτηρισμών, ελπίζοντας ότι κάποια ιδιότητά του θα παραμένει αναλλοίωτη.

- *Βήμα 2*: εξετάζουμε πώς μεταβάλλεται το S.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ & \updownarrow & \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ & \updownarrow & \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$S \leftarrow S \pm 2 \qquad\qquad S \leftarrow S$$

Το S (σε κάθε δυνατή περίπτωση) μεταβάλλεται κατά άρτιο αριθμό, δηλαδή διατηρεί την αρτιότητά του.

- *Βήμα 3*: αναζητούμε την αρτιότητα του S αρχικά.

  Αρχικά $S=1$, περιττός.

- *Βήμα 4*: συνδυασμός των μέχρι τώρα αποτελεσμάτων.

Έχουμε δείξει ότι <u>αρχικά</u> το άθροισμα είναι <u>περιττό</u> και ότι η <u>αρτιότητά</u> του είναι <u>αναλλοίωτη</u>.
Αν όλα τα σημεία γίνονταν ίσα με 1, θα είχαμε $S=10$, δηλαδή άρτιο.
Αυτό όμως δεν γίνεται…

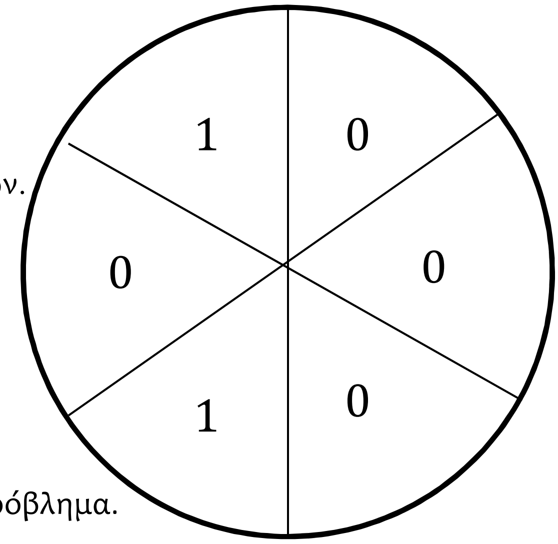
Σχόλιο: πάλι θεωρήσαμε το άθροισμα S των χαρακτηρισμών, το οποίο δεν αναφέρεται πουθενά στην εκφώνηση.

Πρόβλημα 5

Εκφώνηση: ένας κύκλος διαιρείται σε έξι τομείς. Γράφουμε τους αριθμούς 1,0,1,0,0,0 μέσα στους τομείς (με φορά αντίθετη του ρολογιού). Μπορούμε να αυξήσουμε κάθε φορά δυο γειτονικούς αριθμούς κατά 1. Είναι δυνατόν να γίνουν ίσοι όλοι οι αριθμοί μετά από κάποια τέτοια «βήματα»;

Απόπειρα λύσης:

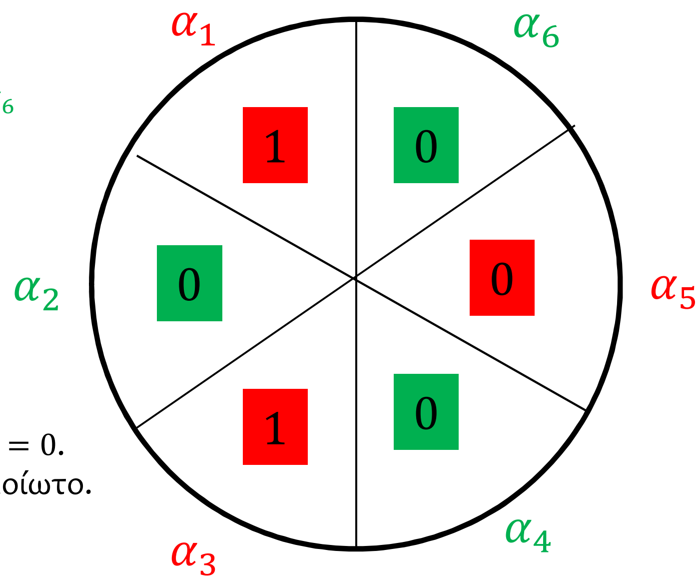
1. Θεωρούμε πάλι το άθροισμα S όλων των αριθμών.
2. Το S αυξάνεται κάθε φορά κατά 2.
3. Το S αρχικά είναι ίσο με 2.
4. Τελικά θέλουμε $S = 6x$, για κάποιο $x \in \mathbb{N}$.



Καμία αντίφαση…
πρέπει να αναζητήσουμε άλλο αναλλοίωτο!

Το «κλασικό» άθροισμα δεν μας βοηθάει σε αυτό το πρόβλημα.

Θεωρούμε το $\mathrm{I} = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 - \alpha_2 - \alpha_4 - \alpha_6$



Το I παραμένει αναλλοίωτο σε κάθε κίνηση
(τα γειτονικά έχουν διαφορετικό χρώμα).

Αρχικά $\mathrm{I} = 2$.
Αν όλοι οι αριθμοί γίνουν ίσοι, τότε θα είναι $\mathrm{I} = 0$.
Αυτό όμως δεν γίνεται, αφού το I είναι αναλλοίωτο.

Σχόλιο 1: μέχρι στιγμής είχαμε δει προβλήματα όπου μια ιδιότητα (αρτιότητα) ενός αριθμού παρέμενε αναλλοίωτη. Εδώ ο ίδιος ο αριθμός (η τιμή του) παραμένει αναλλοίωτος!

Σχόλιο 2: πάλι θεωρήσαμε ένα «άθροισμα» (I) το οποίο δεν είναι καθόλου προφανές.

Πρόβλημα 6

Εκφώνηση: στις κορυφές ενός κύβου είναι τοποθετημένα επτά μηδενικά και μια μονάδα. Αν επιτρέπεται στους αριθμούς κάθε ακμής να προσθέσουμε τον αριθμό 1, να εξετάστε αν μπορούμε με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να δημιουργήσουμε σε κάθε κορυφή:

a) τον ίδιο αριθμό
b) αριθμούς που διαιρούνται με τον 3.

Λύση:

a) Έστω S_1 το άθροισμα τεσσάρων κορυφών που δεν συνδέονται με ακμή και S_2 το άθροισμα των υπόλοιπων κορυφών (που επίσης δεν συνδέονται με ακμή).

Θεωρούμε το $I = S_1 - S_2$. Βλέπουμε ότι παραμένει αναλλοίωτο.

Αρχικά είναι $I = 1$, τελικά θέλουμε $I = 0$, πράγμα που δεν γίνεται.

b) Αν σε κάθε κορυφή οι αριθμοί διαιρούνταν με το 3, τότε και τα S_1, S_2 θα διαιρούνταν με το 3. Άρα και το I θα διαιρούνταν με το 3… πράγμα αδύνατο.

Πρόβλημα 7

Εκφώνηση: δίνονται οι αριθμοί $1,2,3,\dots,\nu$ με $\nu = 2013$ και $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu$οι ίδιο αριθμοί , αλλά με άλλη σειρά (δηλαδή είναι μια μετάθεση των $1,2,3,\dots,\nu$). Να αποδείξτε ότι ο αριθμός

$\mathrm{A} = (\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 2)(\alpha_3 - 3)\dots(\alpha_\nu - \nu)$ είναι άρτιος.

Λύση:

$$S = (\alpha_1 - 1) + (\alpha_2 - 2) + (\alpha_3 - 3) + \cdots + (\alpha_\nu - \nu) =$$

$$= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_\nu) - (1 + 2 + 3 + \cdots + \nu) = 0$$

Αν και οι ν όροι της μορφής $\alpha_i - i$ ήταν περιττοί, τότε το S θα ήταν άθροισμα περιττού πλήθους περιττών όρων, δηλαδή το S θα ήταν περιττός, άτοπο. Άρα τουλάχιστον ένας όρος της μορφής $\alpha_i - i$ είναι άρτιος και το γινόμενο επίσης.

- Σχόλιο 1: το άθροισμα S παραμένει αναλλοίωτο!
- Σχόλιο 2: εδώ δεν υπάρχει κάποια επαναληπτική διαδικασία. Αυτό που αλλάζει είναι η μετάθεση που θα «διαλέξουμε». Όποια και να είναι αυτή το άθροισμα είναι αναλλοίωτο… ίσο με 0.

Μέρος II (Θεωρία Παιγνίων)

- Παιχνίδια δυο παικτών
- Παίζουν εναλλάξ βάσει κάποιων κανόνων
- Δεν υπάρχει ισοπαλία
- Στρατηγική νίκης (ποιος την έχει και ποια είναι)

Πρόβλημα 8

Εκφώνηση: στο τραπέζι υπάρχουν 22 σπίρτα. Δυο μαθητές (ο Α και ο Β) ο ένας μετά τον άλλον παίρνουν 1 ή 2 ή 3 σπίρτα. Όποιος πάρει τελευταίος σπίρτα κερδίζει. Πρώτος παίζει ο Α. Τι πρέπει να κάνει για να κερδίσει;

Απάντηση: ο Α παίρνει αρχικά 2 σπίρτα. Στην συνέχεια, όταν ο Β πάρει 1,2 ή 3 σπίρτα, ο Α θα πρέπει να πάρει αντίστοιχα 3,2 ή 1. Με αυτόν τον τρόπο κερδίζει το παιχνίδι.

Εξήγηση: με την παραπάνω στρατηγική ο Α καταφέρνει μετά από κάθε παίξιμό του να υπάρχουν $\pi o\lambda 4$ σπίρτα στο τραπέζι. Έτσι κάποια στιγμή ο Β θα αναγκαστεί να παίξει με 4 σπίρτα στο τραπέζι. Ότι και να κάνει το παιχνίδι είναι χαμένο…

Σχόλιο 1: παρατηρήστε ότι τα 1,2,3 μας θυμίζουν τα υπόλοιπα της διαίρεσης με το 4.
Σχόλιο 2: αν είχαμε 23 σπίρτα ποιος έχεις στρατηγική νίκης και ποια είναι αυτή; Αν είχαμε 24; Αν είχαμε 22 σπίρτα και μπορούσαν να πάρουν 1,2,3,4 σπίρτα ποιος έχει στρατηγική νίκης και ποια είναι αυτή; Γενικεύστε…

Πρόβλημα 9

Εκφώνηση: στον πίνακα είναι γραμμένοι όλοι οι ακέραιοι αριθμοί από τον 1 έως τον 50. Δυο μαθητές παίζουν το εξής παιχνίδι:

Με τη σειρά ο ένας μετά τον άλλον διαγράφουν από έναν αριθμό. Το παιχνίδι τελειώνει όταν στον πίνακα απομείνουν δυο αριθμοί. Νικητής είναι ο Β, αν το άθροισμα των αριθμών που απομένουν διαιρείται με το 3, διαφορετικά νικητής είναι ο Α. Αν ο Α αρχίζει πρώτος, έχει ο μαθητής Β στρατηγική νίκης?

Λύση 1η: με τη συμμετρία των «άκρων»

Χωρίζουμε τους αριθμούς $1,2,3,\dots,50$ στα 25 ζεύγη $(1,50),(2,49),\dots,(25,26)$.

Όλα τους έχουν άθροισμα $51 = 3 \cdot 17 = \pi o\lambda 3$.

Ο Β έχει την εξής στρατηγική νίκης:

Όταν ο Α διαγράφει έναν αριθμό α, ο Β διαγράφει τον αριθμό $51 - \alpha$, δηλαδή αυτόν που βρίσκεστε στο ίδιο ζεύγος με τον α.

Οπότε στο τέλος θα μείνουν δυο αριθμοί που θα είναι στο ίδιο ζεύγος, με άθροισμα 51 που διαιρείται με το 3.

Λύση 2η: με βοηθό το άθροισμα S

Εξετάζουμε τι υπόλοιπο αφήνει το αρχικό άθροισμα S, όταν διαιρείται με το 3:

Όπως είδαμε πριν, $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 50 = 51 \cdot 25 = 3 \cdot 17 \cdot 25 = \pi o\lambda 3$.

Άρα στην αρχή το άθροισμα είναι $\pi o\lambda 3$. Στο τέλος ο Β θέλει επίσης το S να είναι $\pi o\lambda 3$. Πώς μπορεί να το καταφέρει;

Επιλογές Α	**Επιλογές Β**
$3\kappa + 1$	$3\lambda + 2$
$3\kappa + 2$	$3\lambda + 1$
3κ	3λ

Αν ο Β κάνει τις επιλογές του σύμφωνα με το πινακάκι τότε θα κερδίσει.

Σημείωση: για να λειτουργήσει η παραπάνω στρατηγική θα πρέπει το πλήθος των αριθμών της μορφής $3\kappa + 1$ και $3\kappa + 2$ να είναι ίσα, καθώς και το πλήθος των αριθμών της μορφής 3κ να είναι άρτιος. Αιτιολογίστε γιατί πρέπει να ισχύει το παραπάνω και αποδείξτε (*) τον ισχυρισμό αυτό.

(*) Αντί για τους αριθμούς 1,2, … ,50 θα μπορούσαμε να έχουμε τους αριθμούς 1,2, … ,500. Επομένως η καταμέτρηση δεν είναι σοφός δρόμος. Βρείτε κάτι πιο γενικό.

Πρόβλημα 10

Εκφώνηση: ο Α και ο Β έχουν μια σακούλα με 101 καραμέλες και παίζουν το εξής παιχνίδι. Ο κάθε ένας παίρνει εναλλάξ από 1 έως 10 καραμέλες. Όταν αδειάσει η σακούλα μετρούν τις καραμέλες τους. Ο Α κερδίζει αν οι δυο αριθμοί που προκύπτουν είναι πρώτοι μεταξύ τους. Διαφορετικά κερδίζει ο Β. Ποιος από τους δυο έχει εξασφαλισμένη την νίκη και με ποιον τρόπο? Πρώτα παίζει ο Α.

Απάντηση: το παιχνίδι είναι στημμένο!

Ο παίκτης Α έχει εξασφαλισμένη την νίκη ανεξάρτητα από τον τρόπο που θα παίξει!

Εξήγηση: ο Α κερδίζει όταν οι δυο αριθμοί α, β που θα προκύψουν στο τέλος του παιχνιδιού είναι πρώτοι μεταξύ τους. Για τους α, β ισχύει $\alpha + \beta = 101$.

Πότε δυο φυσικοί αριθμοί που ικανοποιούν την τελευταία είναι πρώτοι μεταξύ τους; Πάντοντε!

Αν οι α, β είχαν κοινό διαιρέτη δ μεγαλύτερο της μονάδας, τότε το δ θα διαιρούσε και τον 101. Το δ είναι υποχρεωτικά μικρότερο από 101 και μεγαλύτερο από την μονάδα (από υπόθεση). Όμως ο 101 είναι πρώτος, δηλαδή διαιρείται μόνο από την μονάδα και τον εαυτό του.. Άρα τέτοιος κοινός διαιρέτης δεν υπάρχει… άρα οι α, β είναι πάντα πρώτοι μεταξύ τους.

Προβλήματα για λύση

1) Έχουμε τον αριθμό 2458 και μπορούμε να κάνουμε οποιεσδήποτε από τις παρακάτω ενέργειες, τη μία μετά την άλλη, με οποιαδήποτε σειρά επιθυμούμε.
   Ενέργεια 1: *προσθέτουμε* ψηφία του αριθμού, για παράδειγμα από το $2 + 4 = 6$, παίρνουμε τον αριθμό 658, ή από το $24 + 5 = 29$, παίρνουμε τον 298, ή από το $24 + 58 = 82$, παίρνουμε τον 82. Ενέργεια 2: *αποσυνθέτουμε* ψηφία, για παράδειγμα αφού $8 = 2 + 6$, παίρνουμε 24526, ή από το $24 = 23 + 1$, παίρνουμε 23158, ή από το $24 = 24 + 0 + 0$, παίρνουμε 240058. Ενέργεια 3: *μεταθέτουμε* ψηφία, για παράδειγμα παίρνουμε τους 2854, 5428 κτλ. Μπορούμε τελικά να φτάσουμε στον 1109;
   Εξετάστε επίσης αν από το 7 μπορούμε με τις παραπάνω ενέργειες να φτάσουμε στο 10.

2) Ένας δράκος έχει 100 κεφάλια. Ένας ιππότης μπορεί να του κόψει 15, 17, 20, ή 5 κεφάλια με ένα χτύπημα του σπαθιού του. Σε κάθε μια από αυτές τις περιπτώσεις, 24, 2, 14, ή 17 κεφάλια γεννιούνται, αντίστοιχα, στους ώμους του δράκου. Αν όλα τα κεφάλια κοπούν, ο δράκος πεθαίνει. Μπορεί να πεθάνει ο δράκος?

3) Σε ένα κουτί υπάρχουν 5 κόκκινες και 6 πράσινες μπάλες. Ο Πασκάλ παίζει ένα παράξενο παιχνίδι. Αφαιρεί κάθε φορά δυο μπάλες από το κουτί, με τους εξής κανόνες:
   i) Αν οι μπάλες είναι και οι δυο πράσινες, ξαναβάζει στο κουτί μια πράσινη.
   ii) Αν οι μπάλες έχουν διαφορετικό χρώμα, ξαναβάζει στο κουτί μια κόκκινη.
   iii) Αν οι μπάλες είναι και οι δυο κόκκινες, ξαναβάζει στο κουτί μια πράσινη.
   Στο τέλος, θα έχει απομείνει μια μπάλα στο κουτί. Ποιο θα είναι το χρώμα της;

4) (***) Οι φυσικοί $1, \dots, \nu$ τοποθέτουνται σε μια τυχαία σειρά. Σε κάθε βήμα, μπορούμε να αλλάξουμε τη θέση δυο γειτονικών αριθμών. Αποδείξτε ότι δεν μπορούμε ποτέ να φτάσουμε στην αρχική σειρά μετά από περιττό αριθμό βημάτων.

5) (**) Η Υπατία και ο Γκάους παίζουν ένα παιχνίδι με τους ακόλουθους κανόνες:

   i) Η Υπατία ξεκινάει τοποθετώντας έναν ίππο σε ένα τυχαίο τετράγωνο μιας $8x8$ σκακιέρας.
   ii) Ο Γκάους μετακινεί πρώτος τον ίππο.
   iii) Η Υπατία και ο Γκάους μετακινούν εναλλάξ τον ίππο, αλλά μπορούν να τον τοποθετήσουν μόνο σε τετράγωνα στα οποία δεν έχει βρεθεί προηγουμένως.
   iv) Ο παίκτης που δεν μπορεί να μετακινήσει πια τον ίππο χάνει.

Ένας ίππος μπορεί να μετακινηθεί είτε ένα τετράγωνο οριζόντια και δυο κάθετα είτε ένα τετράγωνο κάθετα και δυο οριζόντια. Η κίνηση του μοιάζει με ένα L σχήμα.
Με σωστή στρατηγική και τέλειο παίξιμο, είτε η Υπατία είτε ο Γκάους μπορεί πάντα να κερδίζει. Ποιος έχει τη στρατηγική νίκης; Εξηγήστε…

Πηγές

1) Ολυμπιάδες Μαθηματικών Β' - Γ' Γυμνασίου/ Α' Λυκείου - Μπάμπης Στεργίου
2) Problem Solving Strategies - Arthur Engel
3) The Art and Craft of Problem Solving - Paul Zeitz
4) Διάφορα άρθρα από το διαδίκτυο (Λήμμα: invariants)

Επικοινωνία: nasioulas.antonis@gmail.com

Εύχομαι να συνεχίστε να ασχολείστε και να αγαπάτε τα διαγωνιστικά μαθηματικά, επειδή είναι όμορφα και σας διασκεδάζουν και όχι επειδή μπορεί να σας φέρουν επιτυχίες.

Καλή συνέχεια σε ότι κάνετε,

Α.Ν.

Αθήνα – 16.05.2013