1. Δίνονται 4 συνευθειακά διαφορετικά σημεία Α, Β, Γ Δ. Να βρεθεί σημείο Μ ώστε το άθροισμα των αποστάσεων του Μ από τα Α, Β, Γ και Δ να είναι το ελάχιστο.

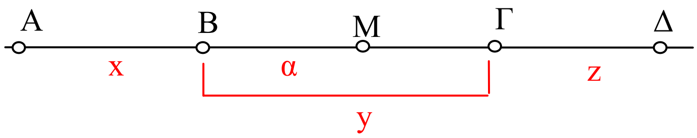
ΛΥΣΗ:

Έστω Α, Β, Γ, Δ σε σειρά.

Αν Μ **συνευθειακό** των Α, Β, Γ, Δ, τότε:

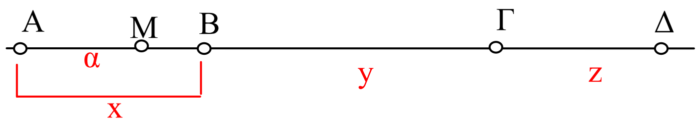
Αν Μ εσωτερικό του ΒΓ (ή επί των Β, Γ), τότε:

D = ΜΑ + ΜΒ + ΜΓ + ΜΔ = (α + x) + α + (y – α) + (y – α + z) = **x + 2y + z.**



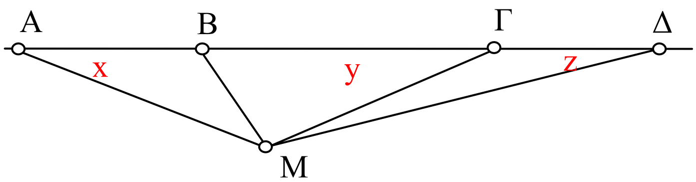
Αν Μ εσωτερικό του ΑΒ (ή επί του Α), τότε:

D = ΜΑ + ΜΒ + ΜΓ + ΜΔ = α + (x – α) + (x – α + y) + (x – α + y + z) =
= 3x + 2y + z – 2α > x + 2y + z, αφού x > α.



Ομοίως, αν Μ εσωτερικό του ΓΔ (ή επί του Δ) ή εξωτερικό του ΑΔ, εύκολα δείχνουμε ότι D > x + 2y + z.

Αν Μ **εκτός της ευθείας** των Α, Β, Γ Δ.



ΜΑ + ΜΔ > ΑΔ = x + y + z   και   ΜΒ + ΜΓ > ΒΓ = y,

Οπότε, D > x + 2y + z.

Οπότε, το άθροισμα των αποστάσεων του Μ από τα Α, Β, Γ και Δ είναι το ελάχιστο, αν το Μ βρίσκεται στο ευθ. τμήμα ΒΓ.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Με x, y, z συμβολίσαμε αντίστοιχα τα μήκη των τμημάτων ΑΒ, ΒΓ και ΓΔ.

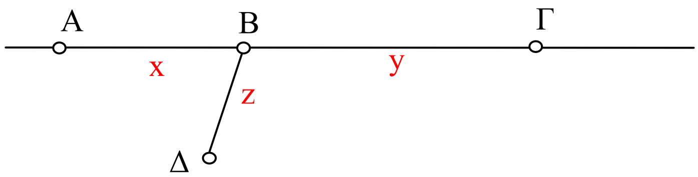
2. Δίνονται 3 συνευθειακά διαφορετικά σημεία Α, Β, Γ και σημείο Δ εκτός της ευθείας των Α, Β, Γ. Να βρεθεί σημείο Μ ώστε το άθροισμα των αποστάσεων του Μ από τα Α, Β, Γ και Δ να είναι το ελάχιστο.

ΛΥΣΗ:

Αν Μ **συνευθειακό** των Α, Β, Γ, (Β εσωτερικό των Α, Γ), τότε:

Αν το Μ ταυτίζεται με το Β, είναι:

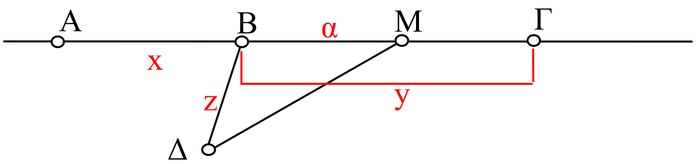
D = ΜΑ + ΜΒ + ΜΓ + ΜΔ = x + 0 + y + z = **x + y + z**.



Αν Μ εσωτερικό του ΒΓ (ή επί των Α, Γ), τότε:

D = ΜΑ + ΜΒ + ΜΓ + ΜΔ = (α + x) + α + (y – α) + ΜΔ =

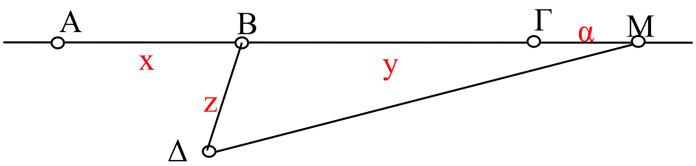
= x + y + ΜΔ + α **>** x + y + z.



Αν Μ εξωτερικό του ΒΓ (π.χ. δεξιά του Γ), τότε:

D = ΜΑ + ΜΒ + ΜΓ + ΜΔ = (α + x + y) + (α + y) + α + ΜΔ **>** x + y + z.

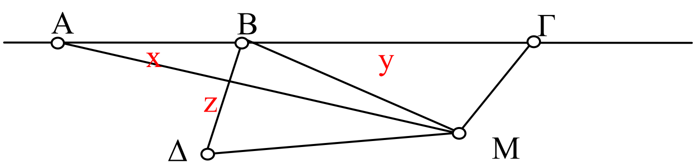
(Ομοίως για Μ αριστερά του Α).



Αν Μ **εκτός της ευθείας** των Α, Β, Γ, τότε:

ΜΑ + ΜΓ > ΑΓ και ΜΒ + ΜΔ ≥ ΒΔ (Το ίσον όταν Μ ≡Δ)

άρα **D >** x + y + z.



Οπότε, το άθροισμα των αποστάσεων του Μ από τα Α, Β, Γ και Δ είναι το ελάχιστο, αν το Μ ταυτίζεται με το Β.

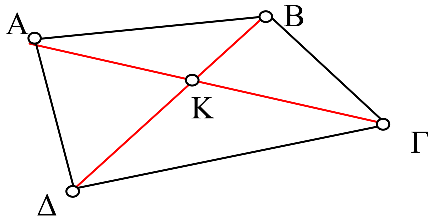
ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Με x, y, z συμβολίσαμε αντίστοιχα τα μήκη των τμημάτων ΑΒ, ΒΓ και ΓΔ.

3. Δίνεται **κυρτό** τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να βρεθεί σημείο Μ του επιπέδου, ώστε το άθροισμα των αποστάσεων του Μ από τα Α, Β, Γ και Δ να είναι το ελάχιστο.

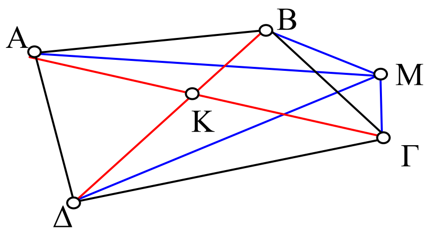
ΛΥΣΗ:

Αν το Μ ταυτίζεται με το Κ, σημείο τομής των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ, τότε:

D = ΜΑ + ΜΒ + ΜΓ + ΜΔ = **ΑΓ + ΒΔ**.



Αν το Μ είναι οποιοδήποτε άλλο σημείο του επιπέδου, τότε:



ΜΑ + ΜΓ ≥ ΑΓ (Το ίσον όταν το Μ πάνω στην ΑΓ)

ΜΒ + ΜΔ ≥ ΒΔ (Το ίσον όταν το Μ πάνω στη ΒΔ)

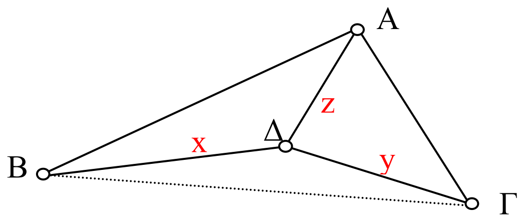
Οπότε, ΜΑ + ΜΒ + ΜΓ + ΜΔ ≥ ΑΓ + ΒΔ (το ίσον μόνο όταν το Μ ταυτίζεται με το Κ),

άρα το **σημείο τομής των διαγωνίων** είναι το ζητούμενο σημείο.

3. **Δίνεται μη κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να βρεθεί σημείο Μ του επιπέδου, ώστε το άθροισμα των αποστάσεων του Μ από τα Α, Β, Γ και Δ να είναι το ελάχιστο.**

ΛΥΣΗ:

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ εσωτερικό του. Τότε το ΑΒΓΔ είναι **μη κυρτό** τετράπλευρο.

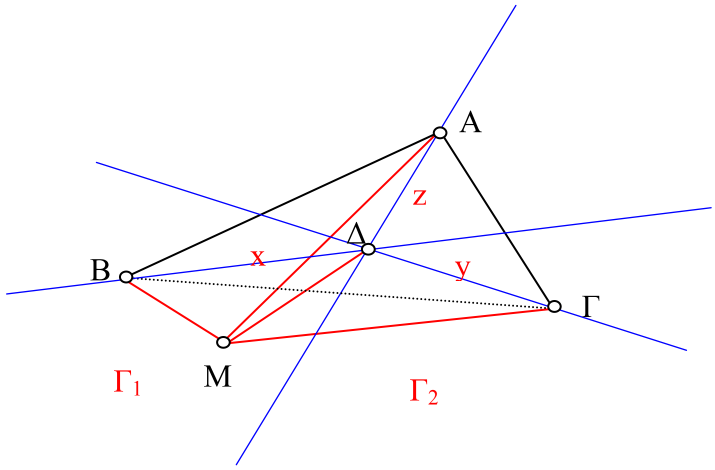


Αν το Μ ταυτιστεί με το Δ, τότε ΜΑ + ΜΒ + ΜΓ + ΜΔ = **z + x + y**.

Οι ευθείες που ορίζουν οι ΑΔ, ΒΔ και ΓΔ χωρίζουν το επίπεδο σε έξι γωνίες $Γ_1$, $Γ_2$, ... , $Γ_6$.

Αν το Μ είναι στη $Γ_1$ τότε, το Δ είναι εσωτερικό στο τρίγωνο ΑΜΓ, οπότε ΜΑ + ΜΓ > z + y. Ακόμη ΜΒ + ΜΔ > x, άρα D > x + y + z.

Αν το Μ είναι στη $Γ_2$ τότε, το Δ είναι εσωτερικό στο τρίγωνο ΑΜΒ, οπότε ΜΑ + ΜΒ > z + x. Ακόμη ΜΓ + ΜΔ > y, άρα D > x + y + z.



Αντίστοιχα, για τις άλλες γωνίες.

Θα ελέγξουμε την περίπτωση το Μ να είναι σημείο των ευθειών.

Αν το Μ είναι σημείο της ευθείας των Α, Δ, στην προέκταση του ΑΔ, τότε ΜΑ + ΜΓ > y + z και ΜΔ + ΜΒ > x.

Αν το Μ είναι σημείο της ευθείας των Α, Δ, στην προέκταση του ΔΑ, τότε ΜΒ + ΜΓ > x + y και ΜΑ + ΜΔ > z.

Αν το Μ είναι εσωτερικό σημείο του ΑΔ, τότε ΜΑ + ΜΔ = z και ΜΒ + ΜΓ > x + y,

Το ίδιο ισχύει και για τις άλλες ευθείες.

Οπότε σε κάθε περίπτωση το ελάχιστο άθροισμα έχουμε όταν το Μ ταυτίζεται με το Δ.

Γιώργος Ρίζος