

Μαθηματικά κατεύθυνσης Γ ' Λυκείου

Άμεσες συνέπειες των ορισμών και των θεωρημάτων

1. α) Μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ , αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει η ισοδυναμία

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

β) Μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ , αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει η ισοδυναμία

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Οι παραπάνω ισοδυναμίες μπορούν να χρησιμοποιούνται στη λύση ανισώσεων ή άλλων σχετικών ερωτημάτων.

2. Μια συνάρτηση f είναι 1 – 1 στο σύνολο A , αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η ισοδυναμία

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Η παραπάνω μπορεί να χρησιμοποιείται για τη λύση εξισώσεων ή άλλων θεωρητικών ερωτημάτων.

3. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο A , τότε η εξίσωση $f(x) = k$ έχει το πολύ μία λύση στο A .

Αν συμβαίνει να έχουμε $k \in f(A)$, τότε η εξίσωση $f(x) = k$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο A

Τα ίδια συμπεράσματα ισχύουν και αν η f είναι 1-1 στο A .

4. Από τον ορισμό του ορίου ή από τη βασική ανισότητα $-x \leq |x| \leq x$ προκύπτει η ισοδυναμία :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$$

5 . Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο ανοικτό διάστημα $\Delta = (\alpha, \beta)$,

$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = +\infty$ ή $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = -\infty$, τότε το

σύνολο τιμών της f στο Δ είναι όλο το $\mathbb{R}$, δηλαδή $f(\Delta) = \mathbb{R}$.

6. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο (ανοικτό) διάστημα Δ , έχει ελάχιστο το μ και μέγιστο το M , τότε η f έχει στο Δ σύνολο τιμών το διάστημα $[\mu, M]$

7. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στα διαστήματα $[a, \beta]$ και $[\beta, \gamma]$ με το ίδιο είδος μονοτονίας, τότε είναι γνησίως μονότονη και στο διάστημα $[a, \gamma]$.