ΑΝΟΙΚΤΗ ΕΠΙΣΤΟΛΗ-ΑΠΑΝΤΗΣΗ
ΤΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΗ ΑΝΔΡΕΑ ΠΕΤΡΑΚΗ
ΣΤΑ ΟΣΑ ΓΡΑΦΤΗΚΑΝ
ΣΤΟ ΤΕΥΧΟΣ 69 ΤΟΥ ΠΕΡΙΟΣΙΚΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Β
ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

Κύριοι συνάδελφοι, εκδότες, διευθυντές, συνεργάτες του περιοδικού «ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Β'» της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας.

Δημοσιεύσατε στο τεύχος 69 του περιοδικού ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Β' (Ιούλιος-Αύγουστος-Σεπτέμβριος 2008) σχολιασμούς των θέσεών μου που διατύπωσα δημόσια σχετικά με τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων δύο αντίστροφων συναρτήσεων.

Νομίζω ότι οφείλατε πρώτα να δημοσιεύατε τις απόψεις μου και στη συνέχεια να τις σχολιάζατε. Αυτό πιστεύω ότι απαιτούσε η δεοντολογία και η ηθική. Επιπλέον οι αναγνώστες θα μπορούσαν να συγκρίνουν τις δύο απόψεις, και να βγάλουν μόνοι τα συμπεράσματά τους.

Πως επιτρέψατε εσείς που εκπροσωπείτε ένα σοβαρό επιστημονικό περιοδικό που απευθύνεται κυρίως σε μαθητές, τους κυρίους **Κυριακόπουλο Αντώνιο και Φωτιάδη Νικόλαο**, να απευθύνονται σε συνάδελφό σας με υβριστικούς και αήθεις χαρακτηρισμούς. Εγώ δεν θέλω να κατεβώ στο επίπεδο των κυρίων αυτών και να απαξιώσω το περιοδικό σας. Σαν όργανα διοίκησης και εποπτείας του περιοδικού οφείλετε να κρατάτε το επίπεδο που αρμόζει και να ελέγχετε επιστημονικά και δεοντολογικά τι γράφουν οι συνεργάτες σας. Περιμένω την άμεση αποκατάστασή μου.

Ο λόγος που αναφερθήκατε στις θέσεις μου, με καθυστέρηση δύο ετών, είναι ότι, **οι συνάδελφοι μαθηματικοί κατάλαβαν ποιο είναι το σωστό και πιο το λάθος και αυτό δεν σας άρεσε καθόλου.**

Οι διαφωνούντες πανικόβλητοι για να συμμαζέψουν τα ασυμμάζευτα, που γράψανε τόσα χρόνια και παρέσυραν τόσο κόσμο σε εσφαλμένες απόψεις μέσω του περιοδικού σας και άλλων εντύπων, προσπαθούν με απαράδεκτες ενέργειες και με συμπεριφορές του τύπου «αποφασίζομεν και διατάσσομεν» να επιβάλουν τις απόψεις τους.

Η ορθότητα των θέσεών μου, κατά την άποψή μου, έχει κριθεί μετά από διάλογο και ανταλλαγή επιστημονικών επιχειρημάτων. Κάθε προσπάθεια φίμωσης μου και κουκουλώματος του θέματος, έπεσε στο κενό.

Θα ήθελα επίσης να θέσω μερικά ερωτήματα στην συντακτική επιτροπή αλλά και σε όλους τους άλλους που είναι υπεύθυνοι για την έκδοση του περιοδικού ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Β και περιμένω με επιστημονικό ενδιαφέρον τις απαντήσεις τους.
Έχουν διαβάσει τα σχετικά κείμενα που δημοσίευσαν στο προηγούμενο τεύχος;
Συμφωνούν με τις μαθηματικές απόψεις και θέσεις που διατυπώθηκαν;
Έχουν δώσει την έγκρισή τους να δημοσιευθούν τα σχετικά κείμενα;

Γιατί στις 20/12/2008 μου ζητήσατε να σας στείλω, το συντομότερο δυνατόν τις απόψεις-απαντήσεις μου για να τις δημοσιεύσετε στο επόμενο τεύχος του περιοδικού σας, τελικά με νεώτερη επιστολή σας (12/01/2009) μου κοινοποιείτε ότι αποφασίσατε να μην δημοσιεύσετε την επιστολή-απάντηση που σας έστειλα;

Παραθέτω περιληπτικά τις απαντήσεις στα υποτιθέμενα λάθη μου παρουσιάζοντας ταυτόχρονα ένα μικρό μέρος των απόψεών μου όπως αυτές διατυπώθηκαν προφορικά ή γραπτά στο παρελθόν και τις οποίες σχολίασαν οι γνωστοί κύριοι.

«Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων δύο αντίστροφων συναρτήσεων, αν υπάρχουν, βρίσκονται μόνο πάνω στην ευθεία y=x.»

1) Το πρώτο λάθος μου όπως δημοσιεύθηκε στο περιοδικό ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Β της ΕΜΕ

- **Πρώτο λάθος.** Θεωρεί διανυσματικές εξισώσεις $\vec{r}_f(t)=\ldots$ και $\vec{r}_{f^{-1}}(t)=\ldots$ των γραμμών C_f και $C_{f^{-1}}$, αντιστοίχως και για να βρει τα κοινά τους σημεία λύνει την εξίσωση: $\vec{r}_f(t)=\vec{r}_{f^{-1}}(t)$. **Αυτό είναι λάθος. Γιατί, για να βρούμε τα κοινά σημεία των δύο αυτών γραμμών, πρέπει και αρκεί να βρούμε όλα τα ζεύγη (t_1,t_2) με $t_1\in D(\vec{r}_f)$, $t_2\in D(\vec{r}_{f^{-1}})$, για τα οποία ισχύει $\vec{r}_f(t_1)=\vec{r}_{f^{-1}}(t_2)$.** (γι' αυτό χάνει τα σημεία που είναι έξω από την ευθεία $y=x$).

Απάντηση στο υποτιθέμενο πρώτο λάθος μου

Ακόμη και ένας πρωτοετής φοιτητής του μαθηματικού τμήματος γνωρίζει ότι, αν ως $\vec{r}_f(t)=f_1(t)\vec{i}+f_2(t)\vec{j}$, $t\in B$ προσδιορίσουμε μια διανυσματική εξίσωση της καμπύλης C_f (όπου οι συναρτήσεις f_1,f_2 είναι 1-1) τότε **«υποχρεωτικά»** (λόγω του ορισμού της αντίστροφης) πρέπει να ορίσουμε ως διανυσματική εξίσωση της καμπύλης $C_{f^{-1}}$ την $\vec{r}_{f^{-1}}(t)=f_2(t)\vec{i}+f_1(t)\vec{j}$, $t\in B$. Συνεπώς για να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των δύο αντίστροφων συναρτήσεων f και f^{-1} λύνουμε την εξίσωση $\vec{r}_f(t)=\vec{r}_{f^{-1}}(t)\Leftrightarrow f_1(t)=f_2(t)$, με $t\in B$.

Αν η συνάρτηση $f:D(f)\to R$ είναι αντιστρέψιμη, η «συνήθης» διανυσματική εξίσωση της καμπύλης C_f είναι η $\vec{r}_f(t)=t\cdot\vec{i}+f(t)\cdot\vec{j}$, $t\in D(f)$ και τότε «**υποχρεωτικά**» (λόγω του ορισμού της αντίστροφης) η διανυσματική εξίσωση της καμπύλης $C_{f^{-1}}$ είναι η $\vec{r}_{f^{-1}}(t)=f(t)\cdot\vec{i}+t\cdot\vec{j}$, $t\in D(f)$.

Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των δύο αντίστροφων συναρτήσεων f,f^{-1} βρίσκονται λύνοντας την εξίσωση

$$\vec{r}_f(t)=\vec{r}_{f^{-1}}(t)\ \Leftrightarrow\ t\cdot\vec{i}+f(t)\cdot\vec{j}=f(t)\cdot\vec{i}+t\cdot\vec{j}\Leftrightarrow f(t)=t,\ t\in D(f).$$

Δύο αντίστροφες συναρτήσεις f,f^{-1} είναι ίσες αν και μόνο αν ισχύει

$$\vec{r}_f(t)=\vec{r}_{f^{-1}}(t),\ \forall t\in D(f)\ \Leftrightarrow\ t\cdot\vec{i}+f(t)\cdot\vec{j}=f(t)\cdot\vec{i}+t\cdot\vec{j},\ \forall t\in D(f)\Leftrightarrow f(t)=t,\ \forall t\in D(f),$$

Δηλαδή **μια αντιστρέψιμη συνάρτηση είναι ίση με την αντίστροφή της αν και μόνο αν είναι η ταυτοτική συνάρτηση**.

2) Το δεύτερο λάθος μου όπως δημοσιεύθηκε στο περιοδικό ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Β της ΕΜΕ

- **Δεύτερο λάθος.** Για να αποδείξει ότι η συνάρτηση $f(x)=4-x,\ x\in\mathbb{R}$ δεν είναι ίση με την αντίστροφή της: $f^{-1}(x)=4-x,\ x\in\mathbb{R}$ (!!!) υποθέτει ότι είναι ίσες και θεωρεί τις εξής διανυσματικές εξισώσεις των C_f και $C_{f^{-1}}$: $\vec{r}_f(t)=t\cdot\vec{i}+(4-t)\cdot\vec{j},\ t\in\mathbb{R}$ (1)

και $\vec{r}_{f^{-1}}(t)=(4-t)\cdot\vec{i}+t\cdot\vec{j},\ t\in\mathbb{R}$ (2)

Βρίσκει ότι: $\dot{\vec{r}}(t)=1\cdot\vec{i}-1\cdot\vec{j}=(1,-1)$ και $\dot{\vec{r}}_{f^{-1}}(t)=-1\cdot\vec{i}+1\cdot\vec{j}=(-1,1)$ και φθάνει, όπως λέει, στο «καταπληκτικό» συμπέρασμα ότι «τα εφαπτόμενα διανύσματα σε οποιοδήποτε σημείο των γραφικών τους παραστάσεων κατά τη φορά διαγραφής τους, είναι αντίθετα!!! ΑΤΟΠΟ» . **Αυτό όμως, όχι μόνο δεν είναι καταπληκτικό και άτοπο, αλλά σύμφωνα με τη Διαφορική Γεωμετρία, είναι αναμενόμενο**. Πράγματι η εξίσωση (2) προκύπτει από την (1) θέτοντας όπου t το $4-t$ (αλλαγή παραμέτρου). Έτσι, οι εξισώσεις (1) και (2) παριστάνουν την ίδια ευθεία και επειδή $\frac{d(4-t)}{dt}=-1<0$, την διαγράφουν κατά αντίθετες φορές. Άρα, τα εφαπτόμενα διανύσματα σε οποιαδήποτε σημεία τους κατά την φορά διαγραφής τους είναι αντίθετα. **Που είναι το καταπληκτικό; Που είναι το άτοπο;**

Το ότι οι εξισώσεις (1) και (2) παριστάνουν την ίδια γραμμή (ευθεία) δε σημαίνει ότι για το ίδιο t από τις εξισώσεις αυτές παίρνουμε το ίδιο σημείο της γραμμής αυτής. Αν ένα σημείο, της γραμμής αυτής, προκύπτει από την (1) για $t=t_0$, από την (2) το ίδιο σημείο προκύπτει για $t=4-t_0$. Μόνο για $t=2$ και από τις δύο εξισώσεις παίρνουμε το ίδιο σημείο, το (2,2), το οποίο ο κ. Πετράκης λέει ότι είναι το μοναδικό κοινό τους σημείο. Αλλά και στο σημείο αυτό τα εφαπτόμενα διανύσματα είναι αντίθετα, **άτοπο όπως μας λέει.** Άρα, ο ίδιος απέδειξε ότι «**το μοναδικό κοινό σημείο (2,2) των δύο γραμμών C_f και $C_{f^{-1}}$ δεν είναι κοινό σημείο αυτών**»!!!

Απάντηση στο υποτιθέμενο δεύτερο λάθος μου

Γνωρίζουμε ότι αν η συνάρτηση $f: D(f)\to R$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της, τότε το διάνυσμα $\dot{\vec{r}}_f(t)=1\cdot\vec{i}+f'(t)\cdot\vec{j}$, $t\in D(f)$ είναι εφαπτόμενο στην γραφική παράσταση της f στο σημείο $M(t,f(t))$ και μάλιστα καθορίζει και την φορά διαγραφής της καμπύλης $C(f)$. (εφαπτόμενο κατά την φορά διαγραφής της)

Αντίστοιχα το διάνυσμα $\dot{\vec{r}}_{f^{-1}}(t)=f'(t)\cdot\vec{i}+1\cdot\vec{j}$, $t\in D(f)$ είναι εφαπτόμενο στην γραφική παράσταση της f^{-1} στο αντίστοιχο σημείο $M'(f(t),t)$ και μάλιστα καθορίζει και την φορά διαγραφής της καμπύλης $C(f^{-1})$. (εφαπτόμενο κατά την φορά διαγραφής της)

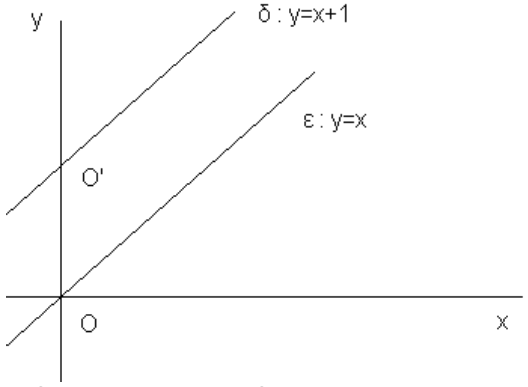
Εφαρμόζοντας τα παραπάνω στην αντιστρέψιμη συνάρτηση $f(x)=4-x$, $x\in R$

παίρνουμε $\dot{\vec{r}}_f(t)=1\cdot\vec{i}-1\cdot\vec{j}=(1,-1)$, $t\in D(f)$ και $\dot{\vec{r}}_{f^{-1}}(t)=-1\cdot\vec{i}+1\cdot\vec{j}=(-1,1)$, $t\in D(f)$.

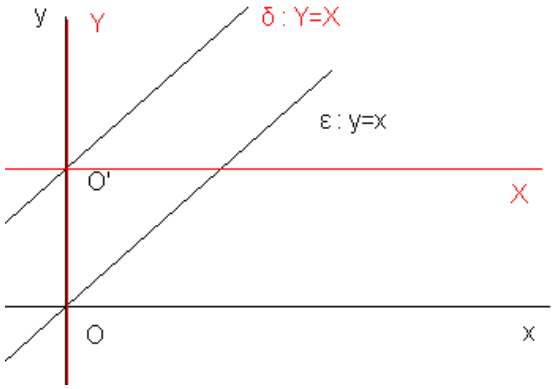
Αν «υποθέσουμε», όπως ισχυρίζονται οι διαφωνούντες κύριοι, ότι η συνάρτηση $f(x)=4-x$, $x\in R$ είναι ίση με την αντίστροφή της καταλήγουμε στο **«καταπληκτικό»** συμπέρασμα ότι ενώ οι δύο συναρτήσεις είναι ίσες, τα εφαπτόμενα διανύσματα σε οποιοδήποτε σημείο των γραφικών τους παραστάσεων κατά την φορά διαγραφής τους, είναι αντίθετα!!! **ΑΤΟΠΟ**, συνεπώς η συνάρτηση $f(x)=4-x$, , $x\in R$ **δεν είναι ίση με την αντίστροφή της**. Η συνάρτηση f αν και έχει το ίδιο πεδίο ορισμού, το ίδιο σύνολο τιμών και το ίδιο γράφημα με την αντίστροφή της δεν είναι ίση με αυτήν!!!

Αυτό δεν γίνεται επίσης και σε άλλες περιπτώσεις; Να ένα παράδειγμα.

Στο σύστημα συντεταγμένων xOy θεωρώ τις ευθείες $\varepsilon: y=x$ και $\delta: y=x+1$.



Είναι προφανές ότι οι δύο αυτές ευθείες δεν έχουν κοινά σημεία.
Θεωρώ την συνάρτηση $f(x)=x$, με $D(f)=R$. Προφανώς η συνάρτηση αυτή έχει γράφημα $G(f)=\{(x,f(x))/x\in R\}=\{(x,x)/x\in R\}$ και γραφική παράσταση στο σύστημα xOy την ευθεία (ε).
Η ευθεία (δ) έχει εξίσωση $y=x+1\Leftrightarrow y-1=x$. Θέτω $X=x$ και $Y=y-1$ τότε στο νέο σύστημα αναφοράς $XO'Y$ η ευθεία (δ) έχει εξίσωση $Y=X$.
Θεωρώ την συνάρτηση $g(X)=X$, με $D(g)=R$. Προφανώς η συνάρτηση αυτή έχει γράφημα $G(g)=\{(X,g(X))/X\in R\}=\{(X,X)/X\in R\}$ και γραφική παράσταση στο σύστημα $XO'Y$ την ευθεία (δ).



Άρα έχουμε:

- Η συνάρτηση $f(x)=x$, $D(f)=R$, έχει γράφημα $G(f)=\{(x,x)/x\in R\}$, και γραφική παράσταση $C(f)$ στο σύστημα xOy, την ευθεία (ε).
- Η συνάρτηση $g(X)=X$, $D(g)=R$, έχει γράφημα $G(g)=\{(X,X)/X\in R\}$, και γραφική παράσταση $C(g)$ στο σύστημα $XO'Y$, την ευθεία (δ).

Οι δύο λοιπόν συναρτήσεις αν και έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού, τον ίδιο τύπο και το ίδιο γράφημα, οι γραφικές τους παραστάσεις δεν έχουν κανένα κοινό σημείο!!! Προφανώς αυτό συμβαίνει γιατί οι γραφικές τους παραστάσεις αναφέρονται σε διαφορετικά συστήματα αναφοράς, ή με αλγεβρική ορολογία επειδή οι μεταβλητές τους είναι συσχετισμένες. Συγκεκριμένα συνδέονται με τις σχέσεις $X=x$ και $Y=y-1$, όπου $y=f(x)$ και $Y=g(X)$. Τελικά οι δύο συναρτήσεις f,g δεν είναι «συγκρίσιμες» για τους παραπάνω λόγους.

Το ίδιο συμβαίνει και με τις αντίστροφες συναρτήσεις, οι γραφικές τους παραστάσεις αναφέρονται σε διαφορετικά συστήματα αναφοράς, το xOy είναι το σύστημα αναφοράς για την f και το yOx είναι το σύστημα αναφοράς για την αντίστροφη, ή με αλγεβρική ορολογία οι μεταβλητές τους είναι συσχετισμένες. Συγκεκριμένα συνδέονται με τις σχέσεις $X=y$ και $Y=x$, όπου $y=f(x)$ και $Y=f^{-1}(X)$.

Κύριοι, οι πάντες γνωρίζουν πολύ καλά, ότι οι πραγματικές συναρτήσεις δεν είναι παραγωγίσιμες στα μεμονωμένα σημεία του πεδίου ορισμού τους, καθώς και τις συνέπειες του γεγονότος αυτού. Αυτό σημαίνει με απλά λόγια ότι, αν δύο συναρτήσεις είναι ίσες μόνο στο μονοσύνολο $B=\{2\}$ τότε οι περιορισμοί τους στο σύνολο αυτό είναι μη παραγωγίσιμες συναρτήσεις. **Συνεπώς ούτε εφαπτόμενη ευθεία ούτε εφαπτόμενο διάνυσμα ορίζονται!!!**

Για να το καταλάβουν καλύτερα οι διαφωνούντες κύριοι τους παρουσιάζω και το εξής παράδειγμα. Οι συναρτήσεις $f(x)=x^2-4x+3$, με $D(f)=R$ και $g(x)=x^2+x+8$, με $D(g)=R$ είναι ίσες στο σύνολο $B=\{-1\}$. Οι ίσοι περιορισμοί των δύο συναρτήσεων στο σύνολο αυτό δεν είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $x_0=-1$, γιατί το σημείο αυτό δεν είναι σημείο συσσώρευσης του $B=\{-1\}$. Οι γραφικές τους παραστάσεις αποτελούνται από ένα και μοναδικό σημείο το $M(-1,8)$, συνεπώς δεν δέχονται εφαπτομένη στο σημείο αυτό γιατί **δεν μπορούμε να φέρουμε εφαπτομένη ούτε εφαπτόμενο διάνυσμα σε καμπύλη η οποία αποτελείται από ένα μόνο σημείο του επιπέδου, όπως εσείς εσφαλμένα ισχυρίζεστε.** Οι αρχικές συναρτήσεις όμως και παραγωγίσιμες στο σημείο $x_0=-1$ είναι, και δέχονται

εφαπτόμενες και εφαπτόμενα διανύσματα στο σημείο $M(-1,8)$, και οι εφαπτόμενες και τα εφαπτόμενα διανύσματα είναι διαφορετικά!!! **Νομίζω ότι αλλού είναι το παράλογο και όχι σε αυτά που ισχυρίζομαι εγώ.**
Τέλος, το τι είναι αναμενόμενο από την Διαφορική Γεωμετρία, ας το αφήσω ασχολίαστο, δεν αντέχει οποιασδήποτε κριτικής, ιδιαίτερα από έναν άνθρωπο που εργάστηκε στο διδακτορικό και σε μια σειρά εργασιών του σε θέματα Διαφορικής Γεωμετρίας.

3) Το τρίτο λάθος μου όπως δημοσιεύθηκε στο περιοδικό ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Β της ΕΜΕ

- **Τρίτο λάθος.** Μπερδεύει τα αναλλοίωτα σημεία ενός γραμμικού μετασχηματισμού με τα κοινά σημεία μιας γραμμής και της εικόνας της μέσω του γραμμικού αυτού μετασχηματισμού.

Απάντηση στο υποτιθέμενο τρίτο λάθος μου

Το θέμα της αντιστροφής μιας συνάρτησης είναι ένα πρόβλημα Γραμμικής Άλγεβρας ή Γραμμικής Γεωμετρίας.
Συγκεκριμένα ας θεωρήσουμε τον γραμμικό μετασχηματισμό $L: R^2 \to R^2$, με $L(x, y) = (y, x)$. Ο γραμμικός αυτός μετασχηματισμός έχει πίνακα μετασχηματισμού τον $K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Το σύνολο των αναλλοίωτων σημείων του μετασχηματισμού αυτού είναι το $M = \{(x, x) / x \in R\}$. Προφανώς τα στοιχεία του συνόλου αυτού απεικονίζονται στα σημεία της ευθείας $y = x$.

Ο γραμμικός αυτός μετασχηματισμός με όρους Γεωμετρίας είναι η αξονική συμμετρία με άξονα συμμετρίας την ευθεία (ε) με εξίσωση $y = x$. Κάθε στοιχείο (x, y) του πεδίου ορισμού R^2 του γραμμικού μετασχηματισμού L αναφέρετε στο σύστημα αναφοράς xOy ενώ η εικόνα του $L(x, y) = (y, x)$ αναφέρεται στο σύστημα αναφοράς yOx.
Εφαρμόζοντας τον γραμμικό αυτό μετασχηματισμό στο γράφημα οποιασδήποτε 1-1 συνάρτησης f βρίσκουμε το γράφημα της αντίστροφή f^{-1}.
Δηλαδή αν έχουμε δύο αντίστροφες συναρτήσεις τότε το γράφημα της f^{-1} είναι η εικόνα του γραφήματος της f μέσω του παραπάνω γραμμικού μετασχηματισμού και οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} αναφέρονται «υποχρεωτικά» στα συστήματα xOy και yOx αντίστοιχα. **Αναλλοίωτα** σημεία του γραφήματος της συνάρτησης f είναι εκείνα τα σημεία του συνόλου $R(f) = \{(x, f(x)) / x \in R\}$ που παραμένουν αναλλοίωτα (δεν αλλάζουν θέση, έχουν δηλαδή τις ίδιες συντεταγμένες ως προς τα δύο συστήματα αναφοράς) με τον παραπάνω γραμμικό μετασχηματισμό, δηλαδή ανήκουν στο σύνολο $M = \{(x, x) / x \in R\}$ που σημαίνει ότι ισχύει $f(x) = x$, $x \in D(f)$.
Μία αντιστρέψιμη συνάρτηση $f: D(f) \to R$ **είναι ίση με την αντίστροφή της** αν και μόνο αν όλα τα σημεία του συνόλου $R(f) = \{(x, f(x)) / x \in R\}$ παραμένουν αναλλοίωτα με τον παραπάνω γραμμικό μετασχηματισμό, δηλαδή αν και μόνο αν ισχύει $f(x) = x$, $\forall x \in D(f)$, που σημαίνει ότι είναι η ταυτοτική συνάρτηση.

4) Το τέταρτο λάθος μου όπως δημοσιεύθηκε στο περιοδικό ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Β της ΕΜΕ

- **Τέταρτο λάθος.** Ισχυρίζεται ότι οι περιορισμοί δύο αντιστρόφων συναρτήσεων οφείλουν να είναι επίσης αντίστροφες συναρτήσεις.

  Αυτό είναι λάθος. Τέτοιο θεώρημα στα μαθηματικά δεν υπάρχει.

Απάντηση στο υποτιθέμενο τέταρτο λάθος μου

Έστω f, g δύο τυχαίες συναρτήσεις με $D(f) \cap D(g) \neq \varnothing$ και $x_0 \in D(f) \cap D(g)$. Τότε οι δύο συναρτήσεις είναι ίσες στο μονοσύνολο $B = \{x_0\}$, **αν και μόνο αν**, ισχύει $f(x_0) = g(x_0)$, γιατί $x_0 \xrightarrow{f} f(x_0)$ και $x_0 \xrightarrow{g} g(x_0)$.

Η ισότητα των δύο συναρτήσεων f, g στο μονοσύνολο $B = \{x_0\}$ είναι **ταυτόσημη** με το γεγονός ότι το σημείο $M(x_0, f(x_0))$ ή $M(x_0, g(x_0))$ είναι κοινό σημείο των γραφικών τους παραστάσεων. Άρα έχουμε την επόμενη πρόταση

Το σημείο $M(x_0, y_0)$ είναι κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων δύο **τυχαίων** συναρτήσεων f, g, αν και μόνο αν

- $x_0 \in D(f) \cap D(g)$ και
- Οι περιορισμοί των δύο συναρτήσεων f, g στο μονοσύνολο $B = \{x_0\}$ είναι ίσες συναρτήσεις με τιμή y_0.

Αν συμβολίσω με E το «ευρύτερο» υποσύνολο του $D(f) \cap D(g)$ στα στοιχεία του οποίου οι δύο συναρτήσεις είναι ίσες, τότε προφανώς οι συναρτήσεις f, g θα είναι ίσες και σε κάθε υποσύνολο B του E.

Έστω f μια αντιστρέψιμη συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο $D(f)$ και f^{-1} η αντίστροφή της. Από τον ορισμό της αντίστροφης γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $R(f)$ της f, δηλαδή ισχύει $D(f^{-1}) = R(f)$.

Αν περιορίσω την συνάρτηση f στο μονοσύνολο $B = \{x_0\} \subseteq D(f)$ τότε **υποχρεωτικά**, λόγω του ορισμού της αντίστροφης, η αντίστροφη f^{-1} περιορίζεται στο μονοσύνολο $f(B) = \{f(x_0)\}$.

Αν εσφαλμένα περιορίσω και την αντίστροφη στο σύνολο $B = \{x_0\}$ και είναι $x_0 \neq f(x_0)$ τότε δεν πληρείται ο ορισμός της αντίστροφης και επομένως

- **Δεν μπορώ να χρησιμοποιήσω το σύμβολο f^{-1} για τον περιορισμό της αντίστροφης στο $B = \{x_0\}$ και**
- **Οποιαδήποτε σύγκριση των συναρτήσεων αυτών (δηλαδή των f, f^{-1} με κοινό πεδίο ορισμού το B) δεν αφορά σύγκριση αντίστροφων συναρτήσεων, γιατί απλούστατα δεν είναι αντίστροφες συναρτήσεις. (κανένα θεώρημα των μαθηματικών δεν χρειάζεται να υπάρχει)**

Περιορίζοντας λοιπόν την συνάρτηση f στο μονοσύνολο B έχω ότι

- Το σύνολο $B = \{x_0\}$ είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.
- Το σύνολο $f(B) = \{f(x_0)\}$ είναι το υποχρεωτικό πεδίο ορισμού της f^{-1}.
- Το x_0 απεικονίζεται μέσω της f στο $f(x_0)$, δηλαδή έχω $x_0 \xrightarrow{f} f(x_0)$.

- Το $f(x_0)$ απεικονίζεται μέσω της f^{-1} στο x_0, δηλαδή έχω $f(x_0) \xrightarrow{f^{-1}} x_0$.

Από τα παραπάνω είναι προφανές ότι, οι δύο αντίστροφες συναρτήσεις f, f^{-1} είναι ίσες στο μονοσύνολο $B=\{x_0\}$, **αν και μόνο αν**, $x_0 = f(x_0)$.

Αλλά η ισότητα των δύο συναρτήσεων f, f^{-1} στο μονοσύνολο $B=\{x_0\}$ είναι **ταυτόσημη** με το γεγονός ότι το σημείο $M(x_0, f(x_0))$ ή $M(x_0, x_0)$ είναι κοινό σημείο των γραφικών τους παραστάσεων. Προφανώς το κοινό τους σημείο $M(x_0, x_0)$ ανήκει στην ευθεία $y=x$, όπως και κάθε άλλο κοινό τους σημείο.

Άλλα συμπεράσματα

i) Η μόνη συνάρτηση που είναι ίση με την αντίστροφή της είναι η ταυτοτική.

ii) Για να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων δύο αντίστροφων συναρτήσεων λύνουμε μια από τις επόμενες ισοδύναμες εξισώσεις

(Ε1) $f(x)=x$, με $x \in D(f)$ (Ε2) $f^{-1}(y)=y$, με $y \in D(f^{-1})$

ή ένα από τα επόμενα ισοδύναμα συστήματα

(Σ1) $\begin{cases} f(x)=y \\ y=x \end{cases}$, (Σ2) $\begin{cases} f^{-1}(y)=x \\ y=x \end{cases}$, (Σ3) $\begin{cases} f(x)=y \\ f(x)=f^{-1}(y) \end{cases}$, (Σ4) $\begin{cases} f^{-1}(y)=x \\ f(x)=f^{-1}(y) \end{cases}$

με $x \in D(f)$ και $y \in D(f^{-1})$.

Επαναλαμβάνω για μια ακόμη φορά ότι, κάθε φορά που περιορίζουμε την συνάρτηση f σε ένα υποσύνολο B του πεδίου ορισμού της, τότε η αντίστροφή της f^{-1} επαναπροσδιορίζεται, και αυτό οφείλετε στο τρόπο κατασκευής-ορισμού της. Το πεδίο ορισμού της αλλάζει, γιατί άλλαξε το πεδίο ορισμού του γεννήτορα της, δηλαδή της f. Ας θυμηθούμε τέλος τι ισχύει $\left(f_B\right)^{-1} = \left(f^{-1}\right)_{f(B)}$

Αυτό άλλωστε δεν συμβαίνει και σε άλλες περιπτώσεις;

Δίνω ένα παράδειγμα από τις «παραγώγους»

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2$, με $D(f)=R$. Με την βοήθεια της συνάρτησης f ορίζουμε την παράγωγό συνάρτηση της, την οποία συμβολίζω με f' και είναι $f'(x)=2x$, με $D(f')=R$.

Οι δύο συναρτήσεις f, f' έχουν οριστεί και έχουν πεδίο ορισμού το R. Ερωτώ, μπορώ να περιορίσω την συνάρτηση f στο σύνολο $(-\infty,0)\cup\{1\}$ και την f' στο $(2,+\infty)$; Προφανώς όχι, γιατί δεν μας το επιτρέπει ο ορισμός της παραγώγου!!! Αφού περιόρισα την συνάρτηση f στο σύνολο $(-\infty,0)\cup\{1\}$, τότε, υποχρεωτικά από τον ορισμό της παραγώγου, προκύπτει ότι η f' περιορίζεται στο $(-\infty,0)$.

Αν τώρα περιορίσω την συνάρτηση f στο σύνολο Z των ακεραίων, τότε δεν ορίζεται η παράγωγος συνάρτηση της, γιατί απλούστατα κανένα σημείο του Z δεν είναι σημείο συσσώρευσης του!!!

5) Το πέμπτο λάθος μου όπως δημοσιεύθηκε στο περιοδικό ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Β της ΕΜΕ

- **Πέμπτο λάθος.** Ισχυρίζεται ότι δύο συναρτήσεις με το ίδιο σύνολο αφίξεως και το ίδιο γράφημα δεν είναι ίσες.!!!

Απάντηση στο υποτιθέμενο πέμπτο λάθος μου
Είναι δυνατό τα γραφήματα δύο συναρτήσεων να είναι ίσα και οι συναρτήσεις να μην είναι ίσες;

Προφανώς ΝΑΙ. Είδαμε ήδη στην δεύτερη περίπτωση τέτοιο παράδειγμα. Αυτό μπορεί να συμβεί σε διάφορες περιπτώσεις. Μια περίπτωση είναι όταν η μια συνάρτηση ορίζεται με την βοήθεια της άλλης. Βασικά στις περιπτώσεις αυτές οι δύο συναρτήσεις δεν είναι «συγκρίσιμες» γιατί οι μεταβλητές τους είναι συσχετισμένες, δηλαδή δεν είναι βουβές μεταβλητές.

Ας ξεκινήσουμε την μελέτη του ερωτήματος με δύο παραδείγματα.

Παράδειγμα 1

Έστω f, g δύο συναρτήσεις με κοινό γράφημα $G=\{(0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0)\}$.

Αν υποθέσουμε ότι οι δύο συναρτήσεις δεν συσχετίζονται μεταξύ τους με οποιονδήποτε τρόπο τότε «συμφωνούμε» ότι για τις δύο συναρτήσεις συμβαίνουν συγχρόνως

x	0	1	2	3	4
f	(0, 4)	(1, 3)	(2, 2)	(3, 1)	(4, 0)
g	(0, 4)	(1, 3)	(2, 2)	(3, 1)	(4, 0)

Οι δύο συναρτήσεις f, g όπως ορίστηκαν στον παραπάνω πίνακα είναι ίσες.

Ορίζουμε τώρα μόνο την συνάρτηση f σύμφωνα με τον πίνακα

x	0	1	2	3	4
f	(0, 4)	(1, 3)	(2, 2)	(3, 1)	(4, 0)

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι είναι αντιστρέψιμη με αντίστροφη που φαίνεται στον επόμενο πίνακα

x	0	1	2	3	4
f	(0, 4)	(1, 3)	(2, 2)	(3, 1)	(4, 0)
f^{-1}	(4, 0)	(3, 1)	(2, 2)	(1, 3)	(0, 4)

Δηλαδή η συνάρτηση f^{-1} ορίζεται από την ισοδυναμία $f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$, με $x \in D(f)$. Είναι προφανές ότι οι συναρτήσεις f, f^{-1} ενώ έχουν το ίδιο γράφημα δεν είναι ίσες. Επιπλέον οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν ένα μόνο κοινό σημείο το M (2, 2).

Παράδειγμα 2

Έστω f, g δύο συναρτήσεις με κοινό γράφημα το συμμετρικό ως προς το $O(0, 0)$ σύνολο $G=\{(-2, 1), (-1, 3), (0, 0), (1, -3), (2, -1)\}$.

Αν υποθέσουμε ότι οι δύο συναρτήσεις δεν συσχετίζονται μεταξύ τους με οποιονδήποτε τρόπο τότε «συμφωνούμε» ότι για τις δύο συναρτήσεις συμβαίνουν συγχρόνως

x	–2	–1	0	1	2
f	(–2, 1)	(–1, 3)	(0, 0)	(1, –3)	(2, –1)
g	(–2, 1)	(–1, 3)	(0, 0)	(1, –3)	(2, –1)

Οι δύο συναρτήσεις f, g όπως ορίστηκαν στον παραπάνω πίνακα είναι ίσες.
Ορίζουμε τώρα μόνο την συνάρτηση f σύμφωνα με τον πίνακα

x	–2	–1	0	1	2
f	(–2, 1)	(–1, 3)	(0, 0)	(1, –3)	(2, –1)

Ορίζουμε την συνάρτηση f^* ως εξής (συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων)

x	–2	–1	0	1	2
f	(–2, 1)	(–1, 3)	(0, 0)	(1, –3)	(2, –1)
f^*	(2, –1)	(1, –3)	(0, 0)	(–1, 3)	(–2, 1)

Δηλαδή η συνάρτηση f^* ορίζεται από την ισοδυναμία $f(x)=y \Leftrightarrow f^*(-x)=-y$, με $x \in D(f)$. Είναι προφανές ότι οι συναρτήσεις f, f^* ενώ έχουν το ίδιο γράφημα δεν είναι ίσες. Επιπλέον οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν ένα μόνο κοινό σημείο το O (0, 0).
Από τα παραπάνω παραδείγματα προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα
1) Αν δύο συναρτήσεις f, g δεν συσχετίζονται μεταξύ τους με οποιονδήποτε τρόπο και έχουν το ίδιο γράφημα τότε οι δύο συναρτήσεις είναι ίσες. **Αυτή την παραδοχή ουσιαστικά κάνουμε κάθε φορά που λέμε «επειδή οι συναρτήσεις f, g έχουν το ίδιο γράφημα είναι ίσες»**
2) Αν δύο συναρτήσεις f, f^* συσχετίζονται μεταξύ τους, δηλαδή η f^* ορίζεται με την βοήθεια της συνάρτησης f τότε μπορεί οι δύο συναρτήσεις να έχουν το ίδιο γράφημα και να μην είναι ίσες.

6) Το έκτο λάθος μου όπως δημοσιεύθηκε στο περιοδικό ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Β της ΕΜΕ

- **Έκτο λάθος.** Ισχυρίζεται ότι οι γραφικές παραστάσεις δύο αντίστροφων συναρτήσεων μπορεί να διέρχονται από το ίδιο σημείο του επιπέδου, **χωρίς το σημείο αυτό να είναι κοινό τους σημείο!!!** (εισήγησή του στη 2η μαθηματική εβδομάδα Θεσσαλονίκης , σελίδα 206).

Απάντηση στο υποτιθέμενο έκτο λάθος μου
Έχω ήδη δώσει το παράδειγμα των συναρτήσεων $f(x)=4-x$, $f^{-1}(x)=4-x$, $x \in R$ όπου οι γραφικές τους παραστάσεις βρίσκονται πάνω στην ευθεία $\varepsilon : x+y=4$ του συστήματος αναφοράς xOy και το μοναδικό κοινό τους σημείο είναι το $M(2,2)$.
Δηλαδή οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων διέρχονται από όλα τα σημεία της ευθείς (ε) και το μόνο κοινό τους σημείο είναι το $M(2,2)$. Αν περιορίσω την f στο $R-\{2\}$ τότε οι γραφικές τους παραστάσεις διέρχονται από τα ίδια σημεία χωρίς κανένα να είναι κοινό.

7) Το απαράδεκτο λάθος μου όπως δημοσιεύθηκε στο περιοδικό ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Β της ΕΜΕ

5. ΕΠΙΛΟΓΟΣ Αναρωτιέται κανένας τι είναι σωστό από αυτά που ισχυρίζεται ο κ. Πετράκης. Από αυτά που γράφει στο βιβλιαράκι που κυκλοφόρησε και αλλού, έχουμε σχηματίσει την εντύπωση ότι ο κ. Πετράκης στον τύπο $f^{-1}(y)=x$ (σελίδα 23 στο παραπάνω βιβλιαράκι) εξακολουθεί να θεωρεί για την συνάρτηση f^{-1} ανεξάρτητη μεταβλητή το x και εξαρτημένη μεταβλητή το y, **που είναι απαράδεκτο λάθος,** γιατί όπως είπαμε και παραπάνω, στην αντίστροφη συνάρτηση οι ρόλοι των μεταβλητών x και y έχουν εναλλαχθεί (μετά τα αλλάζουμε). Ίσως αυτό να είναι η αιτία όλων των τραγελαφικών που μας λέει.

Απάντηση στο υποτιθέμενο απαράδεκτο λάθος μου

Ας θεωρήσουμε τώρα την συνάρτηση $s(t)=3t+2$, με $t\geq 0$ η οποία μας δίνει την μετατόπιση $x=s(t)$ ενός κινητού σε μια ομαλή ευθύγραμμη κίνηση, όπου το t παριστάνει τον χρόνο σε δευτερόλεπτα και το $x=s(t)$ την μετατόπισή του από την αρχή του άξονα σε μέτρα, τότε η συνάρτηση αυτή είναι αντιστρέψιμη με αντίστροφη την $s^{-1}(x)=\dfrac{x-2}{3}$, $x\geq 2$. Είναι προφανές ότι οι μεταβλητές t,x δεν είναι βουβές και συνεπώς δεν μπορώ να κάνω την γνωστή εναλλαγή $t\leftrightarrow x$. Την συνάρτηση s την τροφοδοτούμε με χρόνο (t) σε δευτερόλεπτα και βγάζει μετατόπιση (x) σε μέτρα, ενώ την συνάρτηση s^{-1} την τροφοδοτούμε με μετατόπιση (x) σε μέτρα και βγάζει χρόνο (t) σε δευτερόλεπτα. Να μια προφανής περίπτωση που όσο και αν το θέλετε δεν μπορείτε να κάνετε εναλλαγή των μεταβλητών.

Η εναλλαγή των μεταβλητών στις αντίστροφες γίνεται «καταχρηστικά» και μόνο για εκπαιδευτικούς-παιδαγωγικούς λόγους και πάντα με την προϋπόθεση ότι όταν συγκρίνουμε δύο αντίστροφες συναρτήσεις παίρνουμε υπ' όψιν μας την σχέση που έχουν μεταξύ τους, δηλαδή τον ορισμό.

Σε άλλο κείμενό τους οι διαφωνούντες κύριοι διαπίστωναν και «άλλα λάθη μου». Γιατί δεν τα αναφέρουν και στο συγκεκριμένο; Η απάντησή είναι απλή, απλώς κατάλαβαν ότι τα συγκεκριμένα σχόλια, που έγραψαν ήταν λανθασμένα και τα αποσύρανε. Προβλέπεται, ότι σε επόμενο σχολιασμό τους θα αποσύρουν και άλλα «υποτιθέμενα λάθη» μου, μέχρι που θα τα αποσύρουν όλα, γιατί θα έχουν καταλάβει, ότι αυτά που ισχυρίζομαι είναι τα σωστά.

ΤΕΛΙΚΟ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Οι διαφωνούντες κύριοι όσο επιμένουν τόσο περισσότερο και εκτίθενται και υποπίπτουν σε **νέα μαθηματικά λάθη**. Και το πιο δραματικό για αυτούς είναι ότι τα γραπτά μένουν.

Το ευχάριστο στην όλη υπόθεση είναι ότι οι συνάδελφοι μαθηματικοί έχουν αντίληψη και κρίση και κατάλαβαν ποιο είναι το σωστό και ποιο το λάθος. Δεν χρειάζονται προστασία από κανένα και πολύ περισσότερο δεν παραπλανήθηκαν από τα γραφόμενά μου. Άλλοι τους παραπλανούσαν επί είκοσι και πλέον χρόνια!! Κανείς δεν μπορεί με διαδικασίες «αποφασίζομεν και διατάσσομεν» να επιβάλλει την άποψή του, σε ένα καθαρά επιστημονικό θέμα.

Τέλος αν πράγματι υπάρχουν φορείς ξένων Πανεπιστημίων, Επιστημονικές Ενώσεις και Εταιρείες, οι οποίες αποδέχονται την μια φορά την Α άποψη και την άλλη την αντίθετη άποψη (όχι Α), αυτό σημαίνει ότι στερούνται σοβαρότητας και αξιοπιστίας.

Με τιμή
Καθηγητής Ανδρέας Λ. Πετράκης
Προϊστάμενος του Γενικού Τμήματος Θετικών Επιστημών
Τ.Ε.Ι. ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ