

Βελτιώνοντας το φράγμα στο θέμα Β3 των Πανελλαδικών 2013

Γιώργος Μπαλόγλου

6^η Μαθηματική Εβδομάδα, Θεσσαλονίκη 26-30 Μαρτίου 2014

Περίληψη: Χωρίς να ισχυριζόμαστε ότι υπήρχε κάτι τρωτό (από καθαρά μαθηματικής πλευράς) στο γνωστό ερώτημα, επιχειρούμε να δώσουμε μία όσο το δυνατόν πιο πλήρη (από μαθηματικής και πάλι σκοπιάς) απάντηση, κινούμενοι σαφώς πέραν των εξετάσεων και των αναμενόμενων λύσεων.

πηγή του προβλήματος

Το θέμα Β3 των Πανελλαδικών (κατεύθυνσης) 2013 (27-5-13), εξεταζόμενο εδώ χωρίς σύνδεση με το όλο Θέμα Β, ήταν το εξής:

Αν v είναι ρίζα του πολωνόμου $z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0$, με a_2, a_1, a_0 μιγαδικούς και $|a_2 - 2| = |a_1 - 2| = |a_0 - 2| = 1$, τότε $|v| < 4$.

Το θέμα αυτό θεωρήθηκε από πολλούς υπερβολικά δύσκολο και συζητήθηκε εκτενώς, στον ιστότοπο www.mathematica.gr για παράδειγμα [1], όπου και δόθηκαν αρκετές λύσεις, όπως αυτές των (α) Χρήστου Τσιφάκη ([1], 27-5-13, 10:32 πμ) και (β) Βαγγέλη Μουρούκου ([1], 27-5-13, 10:45 πμ), βασιζόμενες και οι δύο στην τριγωνική ανισότητα και στις $|a_k| \leq 3$ (και αποφεύγοντας την εις άτοπο απαγωγή):

(α) Από την $|v|^3 \leq 3(|v|^2 + |v| + 1) = 3 \frac{|v|^3 - 1}{|v| - 1}$ προκύπτει, για $|v| > 1$, η $|v|^4 < 4|v|^3 - 3$, άρα $|v|^4 < 4|v|^3$ και $|v| < 4$. (Επίσης η $|v|^4 - 4|v|^3 + 3 < 0$ δίνει $|v| < 3,9514$.)

(β) Από την $|v|^3 \leq 3(|v|^2 + |v| + 1) < 3|v|^2 + 3|v| + 4$ προκύπτει η

$$|v|^3 - 3|v|^2 - 3|v| - 4 < 0 \Leftrightarrow (|v| - 4)(|v|^2 + |v| + 1) < 0, \text{ άρα } |v| < 4.$$

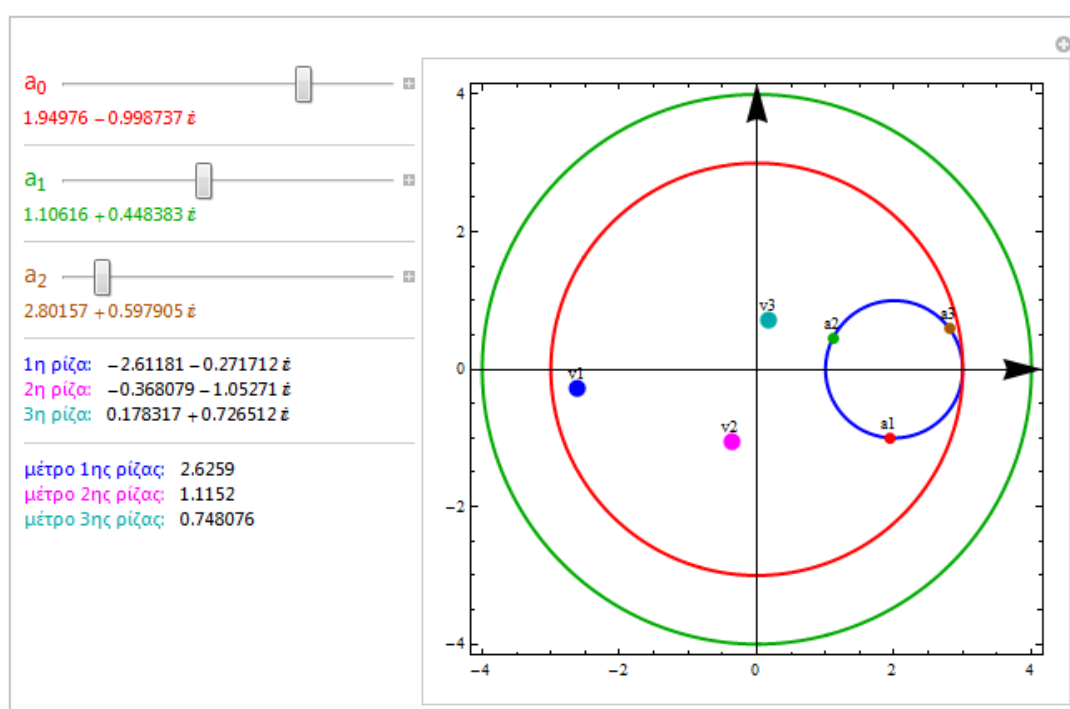
Αν η δεύτερη λύση απαιτεί κάποια εξοικείωση με τα πολυώνυμα και την παραγοντοποίηση που δυστυχώς σπανίζει στις μέρες μας, η πρώτη σίγουρα δεν απαιτεί τίποτα παραπάνω από μία γνωστή (;) αλγεβρική ταυτότητα: όντως αναπάντεχη η δυσκολία του προβλήματος, και μάλιστα για Θέμα Β, αλλά σίγουρα καμιά σχέση με τα περί «θέματος Ολυμπιάδων» και άλλες υπερβολές που ακούστηκαν και γράφτηκαν!

Βεβαίως σκοπός μας εδώ δεν είναι να συζητήσουμε την δυσκολία του θέματος, αλλά ... την δυσκολία του φράγματος: μπορούμε να πετύχουμε κάτι καλύτερο από την $|v| < 4$;

Τέτοιου είδους ερωτήματα βελτίωσης και βελτιστοποίησης, που συνήθως απουσιάζουν από την σχολική ύλη και τις εξετάσεις, αφθονούν στον λεγόμενο «πραγματικό κόσμο» και τείνουν να είναι, όπως θα δούμε και στην συγκεκριμένη περίπτωση, ιδιαίτερα δύσκολα.

γέννηση μιας εικασίας

Το προφανές (;) παράδειγμα του πολυωνύμου $z^3 + 3z^2 + z + 3 = (z + 3)(z^2 + 1)$, που ικανοποιεί την συνθήκη του προβλήματος και έχει ρίζες $-3, i, -i$, μας δείχνει ότι το βέλτιστο δυνατό άνω φράγμα για το $|v|$ είναι το 3. Αυτό δεν σημαίνει ότι πρέπει να σπύσουμε να εικάσουμε ότι ισχύει πάντοτε η $|v| \leq 3$, αλλά εκεί ακριβώς μας σπρώχνει το πείραμα [2] που ξεκίνησε ο χρήστης artes του math.stackexchange.com, με προτροπή του Δημήτρη Λάφκα (lafkasd, [1], 6-6-2013, 7:35 πμ), και ολοκλήρωσε ο Δημήτρης Ανδρεσάκης (dimandres, [1], 6-6-2013, 10:26 μμ), βλ. http://users.sch.gr/dimandres/Kat_B3.cdf (CDF συνιστώσα του WolframAlpha, ελεύθερη εφαρμογή):



Καθώς οι συντελεστές a_0, a_1, a_2 του πολυωνύμου – στο παραπάνω σχήμα έχουμε εκ παραδρομής a_1, a_2, a_3 – κινούνται στον κύκλο $|z - 2| = 1$, οι ρίζες v_1, v_2, v_3 του πολυωνύμου μεταβάλλονται αναλόγως, παραμένοντας πάντως εντός του δίσκου $|z| \leq 3$. Οι παραπάνω θέσεις συντελεστών και ριζών είναι τυχαίες, αλλά το παράδειγμα του Δημήτρη Ανδρεσάκη στο [1] δίνει την ‘οριακή’ περίπτωση $|v| = 3$ (με τα a_0, a_2 στο αριστερό άκρο του διαστήματος τους ($a_0 = 1, a_2 = 1$) και το a_1 στο μέσον ($a_1 = 3$)).

Ενδιαφέρον παρουσιάζει και η αντίστοιχη δουλειά του Δημήτρη Λάφκα στο geogebra, βλ. www.mathematica.gr/forum/download/file.php?id=32733 ([1], 3-6-2013, 6:48 μμ): το γράφημα της $x^3 - |a_2|x^2 - |a_1|x - |a_0|$ επιβεβαιώνει μερικώς την $|v| \leq \rho$, όπου $\rho \sim 3,9514$ η πραγματική ρίζα του πολυωνύμου $x^3 - 3x^2 - 3x -$

3. (Οι ανισότητες $|v| \leq \rho$ και $\rho < 4$ προκύπτουν εύκολα με χρήση Διαφορικού Λογισμού [1] και οδηγούν άμεσα σε μία ακόμη λύση του B3.)

πολύ κοντά στον στόχο

Θεώρημα. Αν v είναι ρίζα του πολωνόμου $z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0$, με a_2, a_1, a_0 μιγαδικούς και $|a_2 - 2| = |a_1 - 2| = |a_0 - 2| = 1$, τότε $|v| < 3,01403$.

Απόδειξη. Αν u, w είναι οι άλλες δύο ρίζες, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0 &= (z - v)[z^2 + (a_2 + v)z + (a_1 + a_2v + v^2)] = \\ &= (z - v)(z - u)(z - w), \end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} |uw| &= |a_1 + a_2v + v^2| = |(v^2 + 2v + 2) + (a_2 - 2)v + (a_1 - 2)| \geq \\ &\geq |v^2 + 2v + 2| - |(a_2 - 2)v + (a_1 - 2)| \geq \\ &\geq |v^2 + 2v + 2| - [|a_2 - 2||v| + |a_1 - 2|] = \\ &= |v^2 + 2v + 2| - |v| - 1. \end{aligned}$$

Προκύπτει τώρα ότι

$$3 \geq |a_0| = |uvw| \geq (|v^2 + 2v + 2| - |v| - 1)|v|.$$

Θέτοντας $v = r(\cos\gamma + isin\gamma)$ λαμβάνουμε, ύστερα από κάποιες πράξεις,

$$|v^2 + 2v + 2| = \sqrt{r^4 + 4(\cos\gamma)r^3 + 8(\cos^2\gamma)r^2 + 8(\cos\gamma)r + 4},$$

οπότε η προηγούμενη ανισότητα δίνει

$$3 \geq \left(\sqrt{r^4 + 4(\cos\gamma)r^3 + 8(\cos^2\gamma)r^2 + 8(\cos\gamma)r + 4} - r - 1 \right) r,$$

$$\frac{3}{r} + r + 1 \geq \sqrt{r^4 + 4(\cos\gamma)r^3 + 8(\cos^2\gamma)r^2 + 8(\cos\gamma)r + 4},$$

και, ύστερα από ύψωση στο τετράγωνο και απλοποιήσεις,

$$8r^4\cos^2\gamma + (4r^5 + 8r^3)\cos\gamma + (r^6 - r^4 - 2r^3 - 3r^2 - 6r - 9) \leq 0.$$

Η διακρίνουσα του παραπάνω τριωνόμου (ως προς $\cos\gamma$) οφείλει να είναι μη αρνητική, άρα

$$r^6 - 6r^4 - 4r^3 - 10r^2 - 12r - 18 \leq 0.$$

Ύστερα από μελέτη του παραπάνω ανάγωγου (;) πολυωνύμου, που έχει πραγματικές ρίζες ίσες περίπου προς $-2,397$ και $3,01402$ (WolframAlpha), προκύπτει η επιδιωκόμενη $r < 3,01403$.

[Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε και μέσω ελαχιστοποίησης του υπόριζου (με χρήση παραγώγου) για $\cos\gamma = -\frac{r^2+2}{4r}$ και της προκύπτουσας ανισότητας $\frac{3}{r} + r + 1 \geq \frac{r^2-2}{\sqrt{2}}$: αυτή η ‘σύμπτωση’ μας οδηγεί στην παραγοντοποίηση $r^6 - 6r^4 - 4r^3 - 10r^2 - 12r - 18 = (r^3 - \sqrt{2}r^2 - (2 + \sqrt{2})r - 3\sqrt{2})(r^3 + \sqrt{2}r^2 - (2 - \sqrt{2})r + 3\sqrt{2})$.]

υπάρχει αντιπαράδειγμα (με $|v| > 3$);

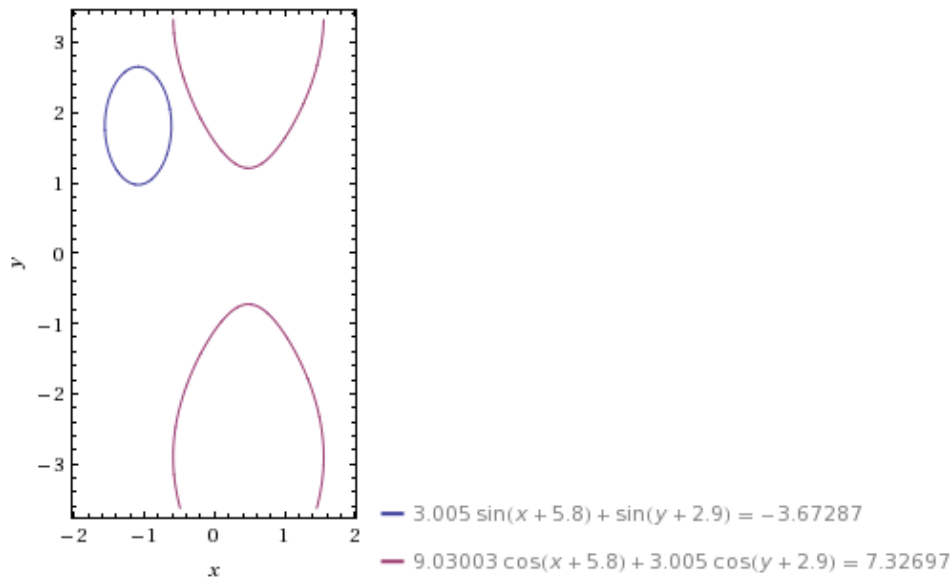
Τα παραπάνω είναι στο πνεύμα όσων είχα γράψει στο [1] (gbaloglou, 15-6-2013, 12:59 πμ), όπου είχα καταλήξει στο ελαφρά ασθενέστερο άνω φράγμα $3,0154^*$... δηλώνοντας αδυναμία περαιτέρω βελτίωσης (έως το εικαζόμενο 3 ειδικότερα). Έκτοτε ούτε εγώ ούτε άλλα μέλη του φόρουμ παρουσίασαν κάτι άλλο επί του θέματος. Τα πειραματικά δεδομένα που ήδη παρατέθηκαν καθιστούν απίθανη την ύπαρξη κάποιου (αντι)παραδείγματος με $3 < |v| < 3,01403$. Παρ’ όλα αυτά, και επειδή η προσπάθεια δημιουργίας απόδειξης και η προσπάθεια κατασκευής αντιπαραδείγματος είναι οι δύο όψεις του ίδιου νομίσματος, τολμώ να παραθέσω κάποιες σκέψεις παρακάτω.

Ας παρατηρηθεί κατ’ αρχήν ότι μία προσεκτική ματιά στην απόδειξη του θεωρήματος – και η αντικατάσταση του 3 από το $|a_0|$ – φανερώνει ότι στο όποιο αντιπαράδειγμα οφείλει να ισχύει η $|a_0| > 2,8492$. Αρκετά εύλογα λοιπόν μπορούμε να επιδιώξουμε αρχικά την εύρεση κάποιου αντιπαραδείγματος με $a_0 = 3$. Στους άλλους δύο συντελεστές δίνουμε απόλυτη ελευθερία, θέτοντας $a_1 = 2 + \cos\varphi + i\sin\varphi$ και $a_2 = 2 + \cos\theta + i\sin\theta$. Κάνοντας τις πράξεις συμπεραίνουμε ότι η $v^3 + a_2v^2 + a_1v + 3 = 0$, όπου πάντοτε $v = r(\cos\gamma + i\sin\gamma)$, είναι ισοδύναμη προς το σύστημα (ως προς θ και φ)

$$r\sin(2\gamma + \theta) + \sin(\gamma + \varphi) = -r^2\sin 3\gamma - 2r\sin 2\gamma - 2\sin\gamma$$

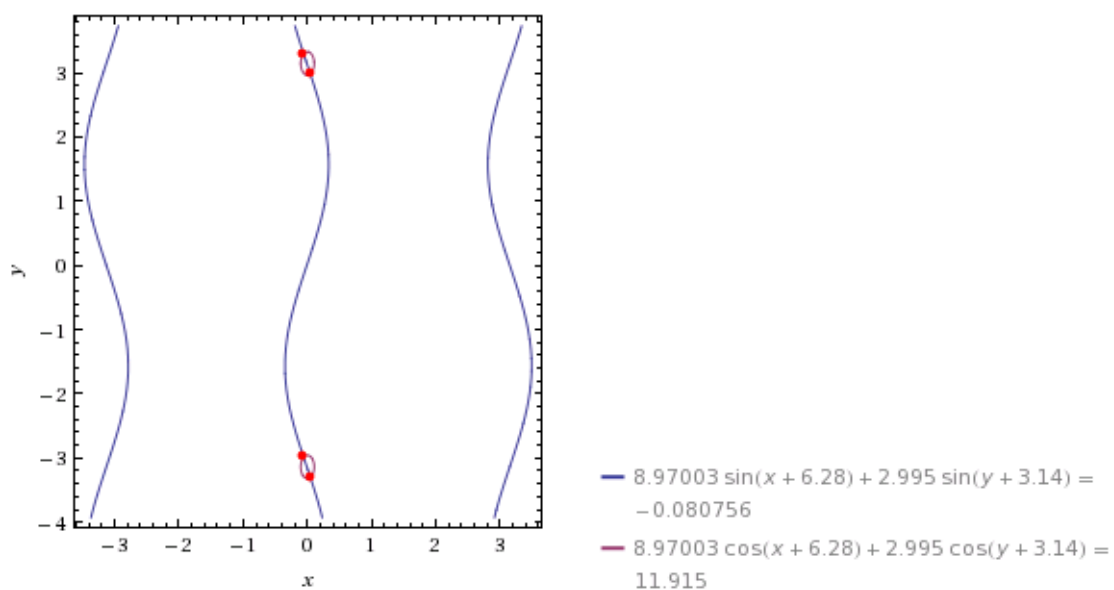
$$r^2 \cos(2\gamma + \theta) + r\cos(\gamma + \varphi) = -r^3\cos 3\gamma - 2r^2\cos 2\gamma - 2r\cos\gamma - 3$$

Όλες οι ενδείξεις συγκλίνουν στην μη ύπαρξη λύσης του συστήματος αυτού για $r > 3$. Στο παρακάτω σχήμα (WolframAlpha) βλέπουμε τις δύο καμπύλες που αντιστοιχούν στις παραπάνω εξισώσεις (με $r = 3,005$, $\gamma = 2.9$, x αντί του θ και y αντί του φ) να πλησιάζουν πολύ η μία την άλλη χωρίς να τέμνονται.



Αντί λοιπόν να αναζητούμε τρόπους κατασκευής του πολυπόθητου (;) αντιπαραδείγματος, θα έπρεπε ίσως να επιστρέψουμε στην προσπάθεια απόδειξης της εικασίας ($|v| \leq 3$), αποδεικνύοντας για παράδειγμα ότι το παραπάνω γενικό σύστημα δεν έχει λύση για $r > 3$. (Ας σημειωθεί ότι για πολλές τιμές των r και γ μία από τις δύο ή και αμφότερες οι εξισώσεις των παραπάνω καμπύλων είναι αδύνατες.)

Στο παρακάτω σχήμα (WolframAlpha) δίνονται οι δύο λύσεις ($\theta \sim -0,0562, \varphi \sim 3,29458$ και $\theta \sim 0,04902, \varphi \sim 2,97824$) του συστήματος για $r = 2,995$ και $\gamma = 3,14$, με την αναμενόμενη εγγύτητα στην οριακή λύση ($\theta = 0, \varphi = \pi$) που αντιστοιχεί στις τιμές $r = 3$ και $\gamma = \pi$:



*η ανισότητα $r < 3,0154$ του [1] προκύπτει ως εξής: αν $r \geq \frac{\sqrt{2} + \sqrt{10 + 8\sqrt{2}}}{2} \sim 3,0154$ τότε $\frac{r^2 - 2}{\sqrt{2}} - r \geq 2$, άρα $|v^2 + 2v + 2| - |v| \geq 2$, οπότε η $3 \geq (|v^2 + 2v + 2| - |v| - 1)|v|$ δίνει $r \leq 3$, άτοπο. (Ας σημειωθεί ότι η $|v^2 + 2v + 2| - |v| \geq 2$ ΔΕΝ ισχύει για, πχ, $r = 3,01$ και $2,63 \leq \gamma \leq 2,88$.)

Αναφορές

[1] *Μαθηματικά κατεύθυνσης 2013*,

<http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=46&t=37283> (24-1-2014)

[2] *Problem from Greek Exams*, <http://math.stackexchange.com/questions/411132/> (24-1-2014)