

$$f(f(x)) = e^x$$

N.Σ. Μαυρογιάννης
Πειραματικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

29 Αυγούστου 2008

Περίληψη

Στον δικτυακό τόπο Mathematica¹ ζητήθηκε (antonis_math) να αποδειχθεί ότι:

Αν για μία γνησίως αύξουσα συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ ισχύει $(f \circ f)(x) = e^x$ για κάθε x τότε η f θα παίρνει και αρνητικές τιμές.

Απαντήσεις έδωσαν τα μέλη m0n και Θωμάς Ραϊκόφτσαλης.
Κατα την συζήτηση ετέθη το ερώτημα

Υπάρχει τέτοια συνάρτηση ;

Στο παρόν σημείωμα, χρησιμοποιώντας γνωστές ιδέες και τεχνικές, δίνεται μία απάντηση στο ερώτημα αυτό.

Αναζητούμε γνησίως αύξουσες² συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε

$$f(f(x)) = e^x \quad (1)$$

Έστω f μία γνησίως αύξουσα λύση της (1) (Σημειώστε ότι ακόμη δεν ξέρουμε αν τέτοια λύση υπάρχει). Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής. Ας πάρουμε ένα x_0 . Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα το όριο της στο x_0 από μικρότερες τιμές θα υπάρχει και θα είναι το $\alpha = \sup f((-\infty, x_0))$. Το ίδιο και για το όριο από μεγαλύτερες τιμές: Θα είναι το $\beta = \inf f((x_0, +\infty))$. Φυσικά θα ισχύει:

$$\alpha \leq f(x_0) \leq \beta \quad (2)$$

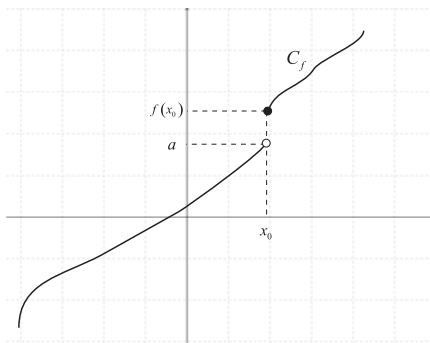
Αν η f είναι ασυνεχής στο x_0 θα πρέπει μία τουλάχιστον από τις ανισότητες της (2) να είναι γνήσια. Χωρίς να βλάπτεται η γενικότητα ας υποθέσουμε ότι είναι η πρώτη δηλαδή

$$\alpha < f(x_0) \quad (3)$$

Η (3) μας λέει ότι το σύνολο τιμών της f έχει μία τουλάχιστον «τρύπα»: το διάστημα $(\alpha, f(x_0))$. Αυτό λόγω μονοτονίας. Σχηματίζοντας την $f \circ f$ θα εισάγουμε στην «δεύτερη» f τιμές από το σύνολο τιμών της «πρώτης». Άρα δεν θα εισαχθούν τιμές από το $(\alpha, f(x_0))$.

¹<http://clubs.pathfinder.gr/MATHEMATICA/17063?forum=56996&read=789>

²θα μπορούσαμε να πούμε και «αύξουσες». Θα ήταν το ίδιο αφού από την $f(f(x)) = e^x$ προκύπτει εύκολα ότι η f είναι 1-1.



Πάλι λόγω μονοτονίας το σύνολο τιμών της $f \circ f$ δεν θα περιέχει τιμές από το διάστημα $(f(\alpha), f(f(x_0)))$. Όμως για $\gamma < \alpha$ είναι

$$f(\gamma) < \alpha < f(x_0)$$

και

$$f(f(\gamma)) < f(\alpha) < f(f(x_0))$$

οπότε $e^\gamma < f(\alpha) < e^{x_0}$. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής για την συνεχή e^x θα είναι $f(\alpha) = e^\delta$ για κάποιο δ και επομένως $f(\alpha) = f(f(\delta))$ δηλαδή το $f(\alpha)$ είναι τιμή της $f \circ f$ (άτοπο).

Αν λοιπόν η (1) έχει γνησίως αύξουσες λύσεις αυτές θα είναι συνεχείς. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι η f είναι μία γνησίως αύξουσα και συνεχής λύση (1) (που εξακολουθούμε να μην ξέρουμε αν υπάρχει). Παρατηρούμε ότι θα απεικονίζει το $(-\infty, +\infty)$ σε ένα ανοικτό διάστημα. Αυτό δε μπορεί να είναι το $(-\infty, +\infty)$ διότι τότε και η $f \circ f$, δηλαδή η e^x θα είχε σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$. Άρα το σύνολο τιμών της f θα πρέπει να είναι της μορφής (k_1, s) όπου το k_1 είναι πραγματικός και το s είναι πραγματικός αριθμός ή $+\infty$. Δε μπορεί όμως το s να είναι πραγματικός διότι τότε η f (άρα και η $f \circ f$) θα ήταν φραγμένη άνω πράγμα αδύνατο διότι η e^x δεν είναι. Επομένως

$$f((-\infty, +\infty)) = (k_1, +\infty)$$

Αλλά πρέπει $f((k_1, +\infty)) = (0, +\infty)$ αφού οι e^x , $f \circ f$ έχουν το ίδιο σύνολο τιμών. Αλλά

$$\begin{aligned} f((k_1, +\infty)) &= (f \circ f)((-\infty, +\infty)) = (f \circ f)((-\infty, k_1]) \cup (f \circ f)((k_1, +\infty)) = \\ &= (0, e^{k_1}] \cup (e^{k_1}, +\infty) = (-\infty, +\infty) \end{aligned}$$

και τότε

$$f((-\infty, +\infty)) = f(-\infty, k_1] \cup f((k_1, +\infty)) = f((-\infty, k_1]) \cup (0, +\infty)$$

δηλαδή:

$$(k_1, +\infty) = f((-\infty, k_1]) \cup (0, +\infty) \quad (4)$$

Από την (4) συνάγουμε ότι

$$f((-\infty, k_1]) = (k_1, 0] \quad (5)$$

Ιδιαίτερος ότι $k_1 < 0$ δηλαδή η f θα πάρει και αρνητικές τιμές.

Η (5) σε συνδυασμό με την (1), όπως θα δούμε στην πορεία, διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην διαμόρφωση της f .

Ας ονομάσουμε $k_2 = 0$ και έχουμε

$$f((k_1, k_2]) = f(f((-\infty, k_1])) = (k_2, k_3] \text{ όπου } k_3 = e^{k_1}$$

$$f((k_2, k_3]) = f(f((k_1, k_2])) = (k_3, k_4] \text{ όπου } k_4 = e^{k_2} = e^0 = 1$$

$$f((k_3, k_4]) = f(f((k_2, k_3])) = (k_4, k_5] \text{ όπου } k_5 = e^{k_3}$$

Με αυτό τον τρόπο σχηματίζουμε:

α) Μία ακολουθία αριθμών

$$k_1 < k_2 < k_3 < k_4 < \dots$$

με $k_1 < 0$, $k_2 = 0$, $k_{n+2} = e^{k_n}$ η οποία καθορίζεται πλήρως από τον πρώτο όρο της $k_1 = 0$ και τείνει στο $+\infty$

β) Μία ακολουθία διαστημάτων

$$J_1 = (-\infty, k_1], J_2 = (k_1, k_2], J_3 = (k_2, k_3], J_4 = (k_3, k_4], J_5 = (k_4, k_5], \dots$$

που η ένωση της είναι το $\mathbb{R}$ και $f(J_n) = J_{n+1}$.

Ας ονομάσουμε τώρα f_n τον περιορισμό της f στο J_n . Θα ισχύει φυσικά $f_n(J_n) = J_{n+1}$. Από την (1) θα είναι

$$f_{n+1} \circ f_n = \exp$$

όπου με $\exp$ δηλώνουμε την εκθετική συνάρτηση. Όμως κάθε μία από τις f_n είναι αντιστρέψιμη (με πεδίο ορισμού το J_{n+1} και σύνολο τιμών το J_n). Επομένως λύνοντας την τελευταία σχέση ως προς f_{n+1} θα βρούμε

$$f_{n+1} = \exp \circ f_n^{-1} \quad (6)$$

Από την προηγούμενη ανάλυση προκύπτει, λόγω της (6) ότι αν γνωρίζουμε την f_1 τότε γνωρίζουμε και την f_2 και μετά την f_3 και επομένως την f αφού ξέροντας πως δρα η f σε κάθε διάστημα J_n την γνωρίζουμε πλήρως. Προκύπτει από την «συγκόλληση» των f_n και θα είναι μία «χλαδωτή» συνάρτηση με άπειρους «χλάδους» τις f_n . Τι θα είναι η f_1 ; Θα είναι

- συνεχής
- γνησίως αύξουσα
- με πεδίο ορισμού το J_1
- σύνολο τιμών το J_2

Παρατηρούμε ότι αν επιλέξουμε την f_1 με τις παραπάνω προδιαγραφές τότε:

α) Η f θα είναι γνησίως αύξουσα. Πράγματι κάθε μία από τις f_n είναι γνησίως αύξουσα λόγω της (6). Αν πάρουμε $p < q$ αν μεν τα p, q ανήκουν στο J_n θα είναι $f(p) = f_n(p) < f_n(q) = f(q)$ ενώ αν ανήκουν στα J_n, J_m θα είναι $n < m$ και τα $f(p) = f_n(p), f(q) = f_m(q)$ ανήκουν στα J_{n+1}, J_{m+1} οπότε αυτόματα είναι το πρώτο μικρότερο του δεύτερου.

β Η f θα είναι συνεχής. Η μεν συνέχεια στο εσωτερικό του κάθε ενός από τα J_n εξασφαλίζεται αμέσως από την (6). Για τα άκρα k_n ($n > 1$) παρατηρούμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow k_n^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow k_n^-} f_n(x) = f_n(k_n) = f(k_n) = k_{n+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow k_n^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow k_n^+} f_{n+1}(x) \stackrel{(6)}{=} \lim_{x \rightarrow k_n^+} e^{f_n^{-1}(x)} \stackrel{(f_n^{-1} \text{ συνεχής})}{=} \lim_{u \rightarrow k_{n-1}^+} e^u = e^{k_{n-1}}$$

Αλλά $k_{n+1} = e^{k_n}$ και επομένως η f είναι συνεχής στα k_n ($n > 1$). Στο k_1 η συνέχεια προκύπτει εύκολα από το προηγούμενο αρκεί να λάβουμε υπ'όψιν ότι $\lim_{x \rightarrow k_1^+} e^{f_1^{-1}(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^u = 1 = k_2$.

γ Ισχύει $f(f(x)) = e^x$. Πράγματι αν $x \in J_n$ τότε $f(f(x)) = f(f_n(x)) = f_{n+1}(f_n(x)) = (\exp \circ f_n^{-1} \circ f_n)(x) = e^x$

Επομένως θα υπάρχουν μονότονες λύσεις της (1) αν και μόνο αν υπάρχουν συναρτήσεις που έχουν τις προδιαγραφές που θέσαμε. Τέτοιες δε προφανώς υπάρχουν για παράδειγμα μία είναι η

$$f_1(x) = -\frac{k_1^2}{x} + k_1$$

Από τα προηγούμενα συνάγουμε την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 1. Έστω k_1 ένας οποιοσδήποτε αρνητικός πραγματικός αριθμός, $k_2 = 0$ και f_1 μία οποιαδήποτε γνησίως αύξουσα και συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $(-\infty, k_1]$ και σύνολο τιμών το $(k_1, k_2]$.

1. $k_n = e^{k_{n-2}}$, $n > 2$
2. $J_1 = (-\infty, k_1)$ και $J_n = [k_{n-1}, k_n)$ για $n > 2$
3. για $n > 2$ είναι $f_n : J_n \rightarrow J_{n+1}$ με $f_{n+1} = \exp \circ f_n^{-1}$

τότε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \dots & \dots & \dots \\ f_n(x) & , & x \in J_n \\ \dots & \dots & \dots \end{cases}$$

είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής και επαληθεύει την

$$f(f(x)) = e^x \quad (*)$$

Όλες οι αύξουσες συναρτήσεις που επαληθεύουν την (*) προκύπτουν με τον παραπάνω τρόπο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν επιλέξουμε $k_1 = -$, $f_1(x) = -1 - \frac{1}{x}$ έχουμε

$$k_1 = -1, \quad k_2 = 0, \quad k_3 = e^{-1}, \quad k_4 = 1$$

και

$$f_1(x) = -1 - \frac{1}{x}, \quad f_2(x) = e^{-\frac{1}{1+x}}, \quad f_3(x) = e^{-\frac{1+\ln x}{\ln x}}, \quad f_4(x) = e^{\frac{1}{1+\ln y}}, \dots$$

Οι δύο αυτές επιλογές ορίζουν πλήρως την f που φαίνεται στο επόμενο σχήμα.

