

ΘΕΜΑ Α

Δίνεται η έλλειψη (C): $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$

A1. Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών της E, E' και την εκκεντρότητα της έλλειψης.

A2. Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις των εφαπτόμενων της έλλειψης στα σημεία τομής της με την ευθεία $x = 1$ είναι:

$$(\varepsilon_1): x + \sqrt{2}y = 2 \text{ και } (\varepsilon_2): x - \sqrt{2}y = 2.$$

Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου τομής των (ε_1) και (ε_2)

A3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζεται από τις προηγούμενες εφαπτόμενες (ε_1) (ε_2) και την ευθεία $(\varepsilon): x = 1$

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση (C): $x^2 + y^2 + 4\lambda x - 2(\lambda + 2)y + 4\lambda + 4 = 0$

B1. Να αποδείξετε ότι παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \neq 0$, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

B2. Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία βρίσκονται τα κέντρα των παραπάνω κύκλων.

B3. Να εξετάσετε αν υπάρχει κύκλος της παραπάνω μορφής ο οποίος να εφάπτεται στον άξονα $x'x$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 2(\lambda + 1)x + (2\lambda - 1)y + 2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$

Γ1. Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του.

Γ2. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων της εξίσωσης (1)

Γ3. Για $\lambda = -1$ να βρείτε:

α) Την εξίσωση του κύκλου C_1 .

β) Την εξίσωση της παραβολής που έχει εστία το κέντρο του κύκλου C_1 .

γ) Την θέση της ευθείας $(\varepsilon): 3x + 4y - 5 = 0$ ως προς τον κύκλο C_1 .

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + y^2 + 4\lambda x - 2(\lambda - 2)y + 4\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0, \lambda \in \mathbb{R}^* (1)$

Δ1. Ναδειχθεί ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$ η (1) παριστάνει κύκλο.

Δ2. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων αυτών για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Δ3. Να εξεταστεί αν υπάρχει κύκλος από τους (1) που να εφάπτεται σε ένα από τους άξονες.

Δ4. Ναδειχθεί ότι η ευθεία $(\varepsilon): y + 2 = 0$ είναι κοινή εφαπτομένη των κύκλων (1).

Δ5. Υπάρχει άλλη κοινή εφαπτομένη των κύκλων αυτών;

ΘΕΜΑ Ε

Σε καρτεσιανό σύστημα Oxy , η εξίσωση ευθείας:

$$(2\lambda^2 + \lambda + 1)x - (\lambda^2 - \lambda + 1)y - (\lambda^2 + 2\lambda) = 0$$

όπου $\lambda = 0, 1, 2, \dots, 19$ παριστάνει τις πορείες 20 πλοίων που κατευθύνονται σε κάποιο λιμάνι.

Ε1. Να βρεθεί η θέση του λιμανιού.

Ε2. Ανοικτά του λιμανιού στο σημείο $(1, 2)$ υπάρχει φάρος που δε λειτουργεί. Να εξετάσετε αν υπάρχει περίπτωση, κάποιο από τα πλοία να συγκρουστεί με το φάρο.

Ε3. Να εξετάσετε αν κάποιο από τα 20 πλοία κινείται παράλληλα με μικρό σκάφος που κινείται στην ίδια περιοχή και του οποίου η πορεία δίνεται από την εξίσωση:

$$11x - 3y - 22 = 0$$

ΘΕΜΑ ΣΤ

Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ και η παραβολή $y^2 = 16x$.

ΣΤ1. Να βρείτε τις εστίες της έλλειψης και τις παραβολής.

ΣΤ2. Έστω E', E οι εστίες της έλλειψης.

α) Να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της παραβολής στα σημεία της $M(4, 8)$, $M'(4, -8)$ και να δείξετε ότι τέμνονται στο E' .

β) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{E'M} \cdot \overrightarrow{E'M'} = 0$.

γ) Αν N είναι το μέσον του $E'M$ να αποδείξετε ότι $EN \parallel E'M'$.

ΘΕΜΑ Ζ

Θεωρούμε τον κύκλο (C) με κέντρο $K(-1, 0)$ που διέρχεται από το σημείο

$$A\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Z1. α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου (C) .

β) Δείξτε ότι η εφαπτομένη (ϵ) του κύκλου (C) στο A έχει εξίσωση

$$x - \sqrt{3}y - 1 = 0.$$

Z2. Αν η ευθεία (ϵ) περνά από την εστία E της παραβολής που έχει κορυφή το $O(0, 0)$ και άξονα τον θετικό ημιάξονα Ox τότε:

α) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής και την εξίσωση της διευθετούσας (δ) .

β) Αν η διευθετούσα (δ) της παραβολής τέμνει το κύκλο (C) στα σημεία M και N , να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου AMN .

ΘΕΜΑ Η

Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 8x$ και η ευθεία $(\epsilon): 3x - 4y = 6$

H1. Να δείξετε ότι η ευθεία (ϵ) περνά από την εστία της παραβολής

H2. Να βρείτε τα κοινά σημεία της (ϵ) και της παραβολής (C) .

H3. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της παραβολής στα σημεία αυτά (ερώτημα β)) και να δείξετε ότι τέμνονται κάθετα.

H4. Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες αυτές τέμνονται πάνω στη διευθετούσα της παραβολής.

ΘΕΜΑ Θ

Δίνεται το σημείο $P(x_0, y_0)$

Θ1. Αν το σημείο $P(x_0, y_0)$ κινείται σε κύκλο με εξίσωση $C: x^2 + y^2 = 4$, να δείξετε ότι

το σημείο $M(x, y)$ με $x = \frac{3}{2}x_0$ και $y = \frac{1}{2}y_0$ κινείται σε έλλειψη C_1 της οποίας να βρείτε την εκκεντρότητα

Θ2. Αν E, E' τα σημεία τομής του κύκλου C με τον άξονα $x'x$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $A(x, y)$ του επιπέδου των οποίων η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων τους από τα E, E' είναι ίση με 1

Θ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης του παραπάνω γεωμετρικού τόπου που είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{a} = (5, 1)$

ΘΕΜΑ Ι

Δίνεται η υπερβολή (C) με εξίσωση: $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1$ και το σημείο της $M(4, 1)$.

I1. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της υπερβολής.

I2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της υπερβολής (C) στο σημείο $M(4, 1)$.

I3. Αν η ευθεία (ϵ) τέμνει τις ασύμπτωτες της υπερβολής (C) στα σημεία K και Λ , τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο M είναι το μέσο του $K\Lambda$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $OK\Lambda$, όπου O η αρχή των αξόνων.

I4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου βάσης της υπερβολής.

ΘΕΜΑ Κ

Έστω οι γραμμές C_1, C_2 με εξισώσεις $C_1: \frac{y^2}{\kappa^2} - \frac{x^2}{\lambda^2} = 1$, $C_2: \frac{y^2}{36} + \frac{x^2}{100} = 1$. Αν η C_1

διέρχεται από τα σημεία $A(0, \sqrt{8})$ και $B(1, 3)$, να βρείτε:

(α) Τις τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, τις εξισώσεις των ασύμπτωτων και την εκκεντρότητα της υπερβολής.

(β) Την εξίσωση της έλλειψης που έχει τις ίδιες εστίες με την υπερβολή και είναι όμοια με την έλλειψη C_2 .

(γ) Τις κορυφές και το εμβαδόν του ορθογωνίου βάσης της υπερβολής.

(δ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της υπερβολής στο σημείο της $\Gamma(-1, -3)$

εφάπτεται του κύκλου με εξίσωση $x^2 + y^2 = \frac{32}{5}$

ΘΕΜΑ Α

Να εξετάσετε ποιοι από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι σωστοί (**Σ**) και ποιοι λανθασμένοι (**Λ**).

- 1) Το σημείο $(-1,1)$ ανήκει στο κύκλο $x^2 + y^2 = 2$
- 2) Η ευθεία $y = 2x$ εφάπτεται στον κύκλο $x^2 + y^2 = 4$
- 3) Η ευθεία με εξίσωση $x = 2$ είναι εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$.
- 4) Η διάκεντρος των κύκλων $C_1 : x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0$ και $C_2 : x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$ έχει μήκος 5.
- 5) Ο γ. τόπος των σημείων $M(2\eta\mu\theta, 3\sigma\upsilon\nu\theta), \theta \in \mathbb{R}$ είναι μια έλλειψη με εστίες στον άξονα $x'x$
- 6) Η εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 2px$ ($p \neq 0$) στο σημείο $M(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $yy_1 = 2p(x + x_1)$
- 7) Οι ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ είναι οι ευθείες $y = \pm \frac{\alpha}{\beta}x$.
- 8) Η υπερβολή $x^2 - y^2 = 2$ έχει εκκεντρότητα $\sqrt{2}$
- 9) Η εφαπτομένη μιας υπερβολής σε ένα σημείο της $M(x_1, y_1)$ διχοτομεί την γωνία $\widehat{E'ME}$
- 10) Οι υπερβολές $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και $\frac{x^2}{\alpha^4} - \frac{y^2}{\beta^4} = 1$ έχουν την ίδια εκκεντρότητα.
- 11) Όσο πιο μεγάλη είναι η εκκεντρότητα, τόσο πιο ανοικτή είναι η υπερβολή.
- 12) Η εξίσωση $y^2 = 16|x|$ παριστάνει δύο παραβολές.
- 13) Οι ελλείψεις $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και $\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$ έχουν δύο μόνο κοινά σημεία.
- 14) Οι διευθετούσες των παραβολών $y^2 = 2px$ και $x^2 = 2py$ τέμνονται πάνω στην ευθεία $y = x$
- 15) Τα σημεία της έλλειψης $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} = 1$ είναι εξωτερικά της έλλειψης $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$
- 16) Ο γ. τόπος των σημείων $M(2 + \eta\mu\theta, 3 - \sigma\upsilon\nu\theta), \theta \in \mathbb{R}$ είναι κύκλος.
- 17) Η εφαπτομένη της παραβολής $x^2 = 2py$ ($p \neq 0$) στο σημείο $M(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $yy_1 = p(x + x_1)$
- 18) Η έλλειψη $\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{4k^2} = 1, k \neq 0$ έχει εκκεντρότητα $\varepsilon = \frac{1}{2}$
- 19) Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας έλλειψης σε ένα σημείο της $M(x_1, y_1)$ διχοτομεί την γωνία $\widehat{E'ME}$
- 20) Οι υπερβολές $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και $\frac{x^2}{k\alpha^2} - \frac{y^2}{k\beta^2} = 1, k > 0$ έχουν τις ίδιες εστίες.

21) Ο γ. τόπος των σημείων $M(\alpha - \beta, \alpha + \beta)$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\alpha \cdot \beta = -\frac{1}{2}$ είναι ισοσκελής υπερβολή.

22) Ο γ. τόπος των σημείων $M(\alpha^2 - \beta^2, 2\alpha\beta - 3)$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 2$ είναι κύκλος..

23) Η εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 2px$ στο σημείο της $A(2p, 2p)$ έχει εξίσωση.
 $\alpha.$ $x+2y+2p=0$, $\beta.$ $x-2y+2p=0$, $\gamma.$ $x+2y-2p=0$, $\delta.$ $x-2y-2p=0$, $\epsilon.$ $2py=2p(x+2p)$

24) Η ευθεία με εξίσωση $x=3$ είναι εφαπτόμενη του κύκλου $(x-1)^2 + y^2 = 4$.

25) Κάθε σημείο της παραβολής $y^2 = 4x$ ισαπέχει από το σημείο $(1,0)$ και την ευθεία $\epsilon: x=-1$