14-05-2014

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ

ΘΕΜΑ 1^{ο}

A. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α, παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο.

B. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα Fermat.

C. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις.

i. Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι κυρτή και υπάρχει η δεύτερη παράγωγος της, τότε ισχύει ότι $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. Αν τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ και $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ υπάρχουν τότε ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

iii. Αν $\int_{\alpha}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,b]$

iv. Αν η συνάρτηση $f:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και ισχύει ότι $\int_{\alpha}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x=0$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in[\alpha,b]$, τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$

v. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Δίνεται μιγαδικός $z\in\mathbb{C}$ για τον οποίο ισχύει ότι

$$\mathrm{e}^{|z+4\mathrm{i}|x}\geq 2|z+\mathrm{i}|x+1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

i. Να αποδείξετε ότι $|z+4\mathrm{i}|=2|z+\mathrm{i}|$.

ii. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z.

iii. Έστω z_1 και z_2 δύο διαφορετικοί μιγαδικοί αριθμοί των οποίων οι εικόνες ανήκουν στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο.

a) Να βρεθεί η μέγιστη του $|z_1-z_2|$

b) Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $\omega=\dfrac{z_1^3+z_2^3}{(z_1-z_2)^3}$ είναι φανταστικός.

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(1)=1$. Αν $z\in\mathbb{C}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει η σχέση:

$$2\int_1^x |z+5\mathrm{i}|\,f(t)\,\mathrm{d}t \le \int_1^{x^2} |\overline{z}+5\mathrm{i}|\,\mathrm{e}^{t-1}\mathrm{d}t+12(x-1)$$

i. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος C των εικόνων του $z\in\mathbb{C}$ στο μιγαδικό επίπεδο, καθώς και η συνάρτηση $h(x)$ που έχει γραφική παράσταση την καμπύλη C.

ii. Να υπολογιστεί το εμβαδό $E(\Omega)$, του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $H(x)=\int_1^x h(t)\,\mathrm{d}t$, του άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x=1$.

Β. Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και η συνάρτηση

$$g(x)=\int_0^x\left(\int_1^u f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u+\mathrm{e}^x-1$$

Αν ισχύει ότι $g(x)\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να δειχθεί ότι:

i. $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=1$

ii. Υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $\int_0^{x_0}\left(3f(t)-\dfrac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=1$

iii. Υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=4\xi-1$

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $xf(x)+\int_0^{x-1} f(x-t)\,\mathrm{d}t=f'(x)$ για κάθε $x\in[0,1]$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,1]$

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$, τέτοιο ώστε: $f''(x_0) = f(1) + \int_0^1 f(t)\,dt$

iii. Να αποδείξετε ότι: $f(0) = f(1)$

iv. Αν για κάποιο $\xi \in (0,1)$ ισχύει ότι $f'(\xi) = 0$, τότε να δειχθεί ότι: $f(\xi) = \frac{f(0)}{\xi^2 + 1}$

v. Αν επιπλέον ισχύει ότι $f(0) = 0$ να δειχθεί ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$