Εστω δακτύλιος $(R,+,\cdot)$ με $x^3 = x \; \forall x \in R$. Να αποδειχθεί οτι ο δακτύλιος είναι αντιμεταθετικός.

Απόδειξη:

Ισχύει ότι

$$2a = (2a)^3 = 8a^3 = 8a \Longrightarrow 6a = 0 \; \forall a \in R$$

Ισχύει επίσης ότι

$$2b = (a+b) - (a-b) = (a+b)^3 - (a-b)^3 =$$

$$2b^3 + 2(a^2b + aba + ba^2) = 2b + 2(a^2b + aba + ba^2)$$

Αρα

$$2(a^2b + aba + ba^2) = 0 \; \forall a, b \in R$$

Θέτοντας όπου b το $ab - ba$, καταλήγουμε στο

$$2(ab - ba) = 0 \tag{1}$$

Εχουμε επίσης:

$$a + a^2 = (a + a^2)^3 = a^3 + 3a^4 + 3a^5 + a^6 = 4(a + a^2) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 3a^2 = 3a \; \forall a \in R$$

(χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $6a = 0$).

Θέτοντας στην τελευταία σχέση όπου a το $a+b$, παίρνουμε

$$3(ab + ba) = 0 \Longrightarrow 3(ab - ba) = 0 \qquad (2)$$

(χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $6ba = 0$).

Από τις (1) και (2) έπεται η αντιμεταθετικότητα του δακτυλίου.