ΘΕΜΑ Α

Έστω ρ μια ρίζα της εξίσωσης $x^2+x+1=0$.

i. Να υπολογίσετε το άθροισμα $S=1+\rho+\rho^2+...+\rho^{2015}$.

ii. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

a. $(z-1)+\rho(z-\rho)+\rho^2\left(z-\rho^2\right)=0$

b. $|z-1|^2+|z-\rho|^2+\left|z-\rho^2\right|^2=3\left(1+|z|^2\right)$

Ρουμανία

ΘΕΜΑ Β

A. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, τέτοιοι ώστε $|z_1|+|z_2|=|z_1+z_2|$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένας μη αρνητικός αριθμός λ τέτοιος ώστε $z_1=\lambda z_2$.

B. Αν ισχύει $\left|z^3\right|+\left|1-z^3\right|=1$ τότε:

i. να δείξετε ότι $z^3 \in R$ και έπειτα ότι $0 \le z^3 \le 1$

ii. να δείξετε ότι $z \in R$ ή $2\left|\mathrm{Re}(z)\right|=|z|$

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ FAZA LOCALĂ, 9.02.2013 Clasa a X-a *Ileana Oţoiu*

C. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει μιγαδικός αριθμός $z=x+yi, x \in R, y \in R^*$, τέτοιος ώστε:

$$|z-2|+|z+2|=4.$$

Prof. Pană Florian, Calimanesti

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $z, w \in C$ ώστε $|z-1|=|z-i|$ και $\left|w^2-4w+3\right|=\lambda|w-i|, \lambda>0$.

i. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z. (4μ)

ii. Αν η εξίσωση $z=w$ έχει μοναδική λύση τότε να δείξετε ότι $\lambda=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ (6μ) και να προσδιορίσετε την μοναδική λύση της $z=w$ (5μ).

iii. Αν A,B οι εικόνες των z,u αντίστοιχα με $u = z - \frac{4}{\bar{z}}$, $z \neq 0, \pm(1+i)\sqrt{2}$, να δείξετε ότι τα σημεία A,B,O είναι συνευθειακά (5μ) και ότι $|u-3+4i| \geq \frac{7\sqrt{2}}{2}$ (5μ) .

Μαυροφρύδης Βασίλης

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $z,w \in C$ με $|z| = 4 : (1)$ και $w = \frac{3(z+4)}{z-1} : (2)$.

i. Να δείξετε ότι: $|w|^2 = 8\,\mathrm{Re}(w)$.

ii. Να δείξετε ότι: $|w-3|^2 + |z-1|^2 \geq 30$ και ότι $|w+z-4|^2 + |w-z-2|^2 \geq 60$.

iii. Να εξετάσετε αν υπάρχουν z,w που ικανοποιούν τις $(1),(2)$ ώστε $|z|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \leq 0$.

iv. Να βρείτε την ελάχιστη και την μέγιστη τιμή της παράστασης $A = \frac{|w+3|}{|z-1|}$.

Μαυροφρύδης Βασίλης

ΘΕΜΑ BONUS

Έστω $z_1, z_2 \in C$ με $z_1 \neq z_2$ ώστε

$\left|z_1 - \frac{z_1}{2015}\right| = \left|z_2 - \frac{z_2}{2015}\right| = \left|z_1 + z_2 - \frac{z_1}{2015} - \frac{z_2}{2015}\right|$. Να υπολογίσετε την δύναμη $\left(2015 \cdot \frac{z_1}{z_2}\right)^{2015}$.

Prof. Roata Cristian, Rm. Valcea

Prof. Smarandache Valentin, Calimanesti