

Επαναληπτικό διαγώνισμα στα Μαθηματικά κατεύθυνσης

Θεματική Ενότητα : Μιγαδικοί Αριθμοί.

Αύγουστος 2014

Θέμα Α

A.1 Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ να αποδειχθεί ότι:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

Μονάδες 9

A.2 Τι ονομάζεται μέτρο του μιγαδικού $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$;

Μονάδες 3

A.3 Ποιες είναι οι δυνατές τιμές των δυνάμεων του i ;

Μονάδες 3

A.4 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί στη κάθε πρόταση.

1. Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι $(z - \bar{z}) \cdot i \in \mathbb{R}$.
2. Για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$ ισχύει η ισοδυναμία: $|z| + |w| = 0 \Leftrightarrow z = w = 0$.
3. Για κάθε $z \in \mathbb{C}^*$ ισχύει ότι $\Im m(z + \bar{z}) \neq 0$.
4. Αν η εικόνα του $z = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ είναι σημείο της ευθείας $\epsilon : y = 2x + 8$, τότε $\Im m(z) = 2\alpha + 8$.
5. Ισχύει $|z - w|^2 = z^2 - 2zw + w^2$.

Μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνεται η εξίσωση:

$$(w + \bar{w})(3 - 2i) + (w - \bar{w})(5 - i) = 8 + 6i.$$

B.1 Δείξτε ότι $w = 1 + i$.

Μονάδες 6

B.2 Αν $z_1 = \left(\frac{w}{\sqrt{2}}\right)^{50}$ και για τους μιγαδικούς z ισχύει ότι

$$|z - z_1| = |z - |z_1||$$

τότε

i. Βρείτε το $\Re(z_1)$ και το $\Im(z_1)$.

Μονάδες 5

ii. Δείξτε ότι $\Re(z) = \Im(z)$.

Μονάδες 5

iii. Για $z \neq 0$ βρείτε τη τιμή της παράστασης

$$A = \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}.$$

Μονάδες 5

B.3 Αν $u = w + 2i$ δείξτε ότι ο $k = u^{2014} + \bar{u}^{2014} \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Θέμα Γ

Θεωρούμε τους $z, w \in \mathbb{C}$ για τους οποίους ισχύουν:

- $\Re\left(\frac{1}{z-1}\right) = \frac{1}{2}(1)$

- $|2w - 6i| + |\bar{w} + 3i| = |1 + \sqrt{2}i|^2(2)$

Γ.1 Βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους των εικόνων των μιγαδικών z, w .

Μονάδες 8

Γ.2 Αν z_1, z_2 δύο μιγαδικοί που ικανοποιούν την (1) να δείξετε ότι

$$|z_1 + z_2 - 4| \leq 2.$$

Μονάδες 5

Γ.3 Από τους μιγαδικούς αριθμούς z της σχέσης (1), να βρεθούν εκείνοι για τους οποίους ισχύει $|z| = \sqrt{5}$.

Μονάδες 5

Γ.4 Αν $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ δύο μιγαδικοί που ικανοποιούν την (2) με $|w_1 - w_2| = \sqrt{2}$ δείξτε ότι $|w_1 + w_2| \leq \sqrt{62}$ και έπειτα βρείτε τη μέγιστη τιμή του μέτρου $|z - \bar{w}|$.

Μονάδες 7

Θέμα Δ

Δ.1 Να λυθεί η εξίσωση $z^2 - 6z + 18 = 0$ και να παραγοντοποιηθεί.

Μονάδες 2

Δ.2 Δίνονται οι μιγαδικοί $z, w \in \mathbb{C}$ με

- $|z^2 - 6z + 18| - 2|z - 3 + 3i| = 2 - |\bar{z} - 3 + 3i|$
- $|2w - 6 - 6i| = 2$

i. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι ο κύκλος με κέντρο $K(3,3)$ και ακτίνα 2 και στη συνέχεια να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $\Re(z)$.

Μονάδες 6

ii. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών w .

Μονάδες 5

Δ.3 Για τους παραπάνω μιγαδικούς z, w δείξτε ότι $1 \leq |z - w| \leq 3$ και $|z + w| \leq 6\sqrt{2} + 3$.

Μονάδες 6

Δ.4 Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς z δείξτε ότι ο αριθμός

$$u = (z_1 - z_2) \left(\frac{4}{z_1 - 3 - 3i} - \frac{4}{z_2 - 3 - 3i} \right) \in \mathbb{R}$$

και ότι $0 \leq u \leq 16$.

Μονάδες 6

Παρατηρήσεις

- Προσέξτε ιδιαίτερα τη διαχείριση χρόνου.
- $\Re(z)$ =πραγματικό μέρος του μιγαδικού z και $\Im(z)$ =φανταστικό μέρος του μιγαδικού z .
- Διάρκεια 3 ώρες.

Καλή Διασκέδαση !