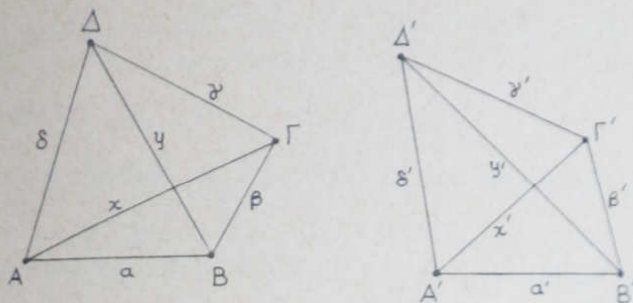


ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ, 1151) (Ἀντίστροφον τοῦ δευτέρου θεωρ. τοῦ Πτολεμαίου).
 "Ἄν εἰς τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ πλευρῶν $AB = \alpha$, $B\Gamma = \beta$, $\Gamma\Delta = \gamma$, $\Delta A = \delta$
 καὶ διαγωνίων $A\Gamma = x$, $B\Delta = y$ ὑφίσταται ἡ σχέσηις $\frac{x}{y} = \frac{\alpha\delta + \beta\gamma}{\alpha\beta + \gamma\delta}$ τὸ τετρά-
 πλευρον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

Ἀπόδειξις. Θὰ ἀποδείξωμεν κατ' ἀρχὰς ὅτι ἐὰν δύο τετράπλευρα ἔχουν
 $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, $\delta = \delta'$ καὶ $x > x'$ τότε θὰ εἶναι $y < y'$ (σχ. 8).
 Πράγματι, τὰ τρίγωνα $A\Delta\Gamma$, $A'\Delta'\Gamma'$ ἔχουν $\delta = \delta'$, $\gamma = \gamma'$ καὶ $x > x'$.
 Ἄρα $\Delta > \Delta'$ (1), ὁμοίως ἐκ τῶν τριγώνων $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$ ἔχομεν $B > B'$ (2).

— 101 —

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει :
 $B + \Delta > B' + \Delta' \Rightarrow 360 - (A + \Gamma) > 360 - (A' + \Gamma') \Rightarrow A + \Gamma < A' + \Gamma'$ (3).
 Ἐκ τῆς (3) προκύπτει ὅτι ἀναγκαστικῶς εἶναι $A < A'$ καὶ $\Gamma < \Gamma'$, διότι
 ἐν ἧτοι $A > A'$, τότε ἐκ τῶν τριγώνων $AB\Delta$ καὶ $A'B'\Delta'$ θὰ εἴχωμεν :
 $(\alpha = \alpha', \delta = \delta', A > A') \Rightarrow x > x'$
 ἐνῶ ἐκ τῶν τριγώνων $B\Gamma\Delta$ καὶ $B'\Gamma'\Delta'$ θὰ εἴχωμεν :
 $(\beta = \beta', \gamma = \gamma', \Gamma < \Gamma') \Rightarrow x < x'$,
 αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀσυμβίβαστοι. Ἄρα, $A < A'$ καὶ $\Gamma < \Gamma'$ ἐκ τῶν ὁποίων προ-
 κύπτει $y < y'$ (σχ. 8).



Σχ 8.

Κατασκευάζομεν ἤδη ἐγγράψιμον τετράπλευρον πλευρῶν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$
 (πρόβλημα τοῦ Sturm. Ἡ κατασκευὴ πάντως δὲν ἐνδιαφέρει).

Ἔστωσαν x', y' αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ. Θὰ ἔχωμεν (2ον θεωρ. Πτολεμαίου)

$$\frac{x'}{y'} = \frac{\alpha\delta + \beta\gamma}{\alpha\beta + \gamma\delta} \text{ καὶ ἐκ τῆς } \frac{x}{y} = \frac{\alpha\delta + \beta\gamma}{\alpha\beta + \gamma\delta} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{x'}{y'} \Rightarrow \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}$$

Ἄν $x > x'$ ἐκ τῆς $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} \Rightarrow \frac{y}{y'} > 1 \Rightarrow y > y'$ ἄτοπον.

Ἄν $x < x'$ ἐκ τῆς $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} \Rightarrow \frac{y}{y'} < 1 \Rightarrow y < y'$ ἄτοπον.

Ἄρα, $x = x'$, $y = y'$ καὶ τὸ τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ
 κατασκευασθὲν ἐγγράψιμον.

Δύται : Ν ἰσοσηφίδης. Θ. Τριανταφυλλίδης.