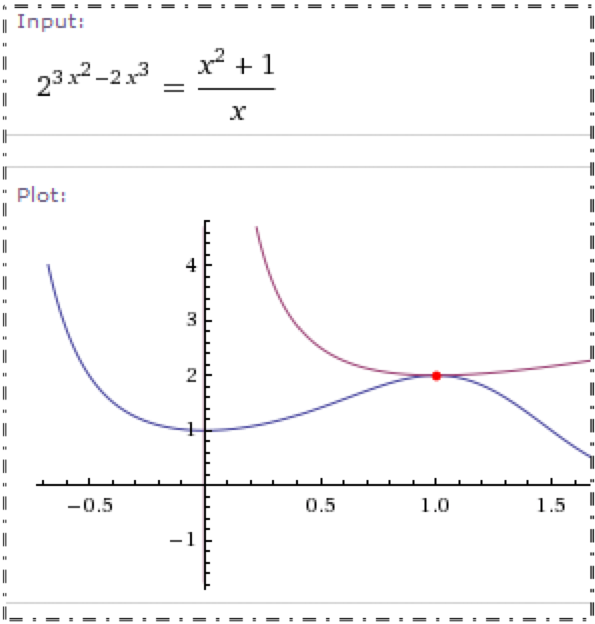

Να λυθεί στο σύνολο R των πραγματικών αριθμών η εξίσωση

$$\mathbf{2^{3x^2-2x^3} = \frac{x^2+1}{x}}$$

Λύση



Είναι

$$2^{3x^2-2x^3} > 0 \rightarrow \frac{x^2+1}{x} > 0 \rightarrow x > 0$$

Θα αναζητήσουμε επομένως λύσεις στο R_+^*.
Όμως

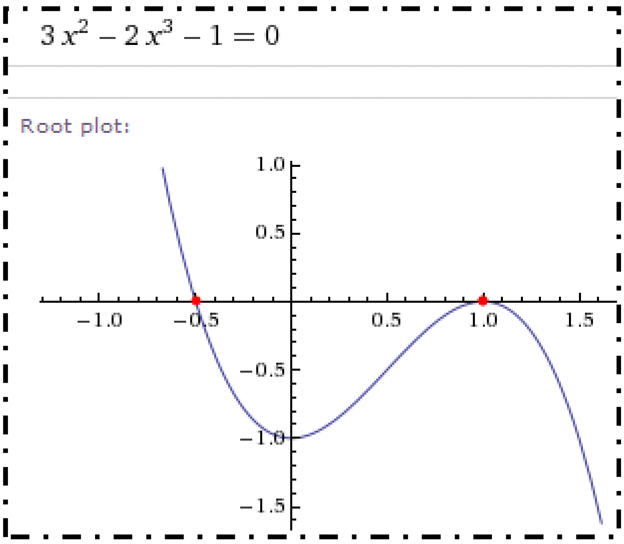
$$\frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x} \geq 2$$

με την ισότητα να ισχύει όταν χ=1 η οποία είναι και προφανής ρίζα της εξίσωσης.

Θα δείξουμε ότι στο (0,+∞) το 2 είναι η μεγίστη τιμή της παράστασης $2^{3x^2-2x^3}$

Πράγματι λύνοντας την ανίσωση $2^{3x^2-2x^3} > 2$ έχουμε

$$2^{3x^2-2x^3} > 2 \leftrightarrow 3x^2 - 2x^3 > 1 \leftrightarrow$$
$$3x^2 - 2x^3 - 1 > 0 \leftrightarrow$$
$$(x-1)(-2x^2 + x + 1) > 0 \leftrightarrow$$
$$(x-1)^2(-2\chi - 1) > 0 \leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$$



Που σημαίνει ότι στο $(0, +\infty)$ το 2 είναι μέγιστο (για χ=1) που εμφανίζεται μοναδική φορά αφού η εξισωση $2^{3x^2-2x^3} = 2$ έχει μοναδικές ρίζες το 1 και $-\frac{1}{2}$

Π.Γ