Οι παρακάτω τρεις κατασκευές έγιναν από τον Κ. Σερίφη για το mathematica.gr
με αφορμή την άσκηση:

Δίνονται τρεις κύκλοι (Ο,α), (Κ,β) και (Λ,χ) οι οποίοι ανα δύο εφάπτονται εξωτερικά και συγχρόνως και οι τρεις έχουν κοινή εφαπτομένη την ευθεία ΜΡΝ , όπου Ν, Μ, Ρ τα σημεία επαφής των τριών κύκλων με την ευθεία (3η κατασκευή).
Να υπολογιστεί η ακτίνα χ του τρίτου κύκλου σε συνάρτηση με τα α,β.

Η απάντηση:
Αποδεικνύεται ότι:
$\sqrt{\alpha\chi}+\sqrt{\beta\chi}=\sqrt{\alpha\beta}$ απ' όπου εύκολα προκύπτει η τιμή του χ....

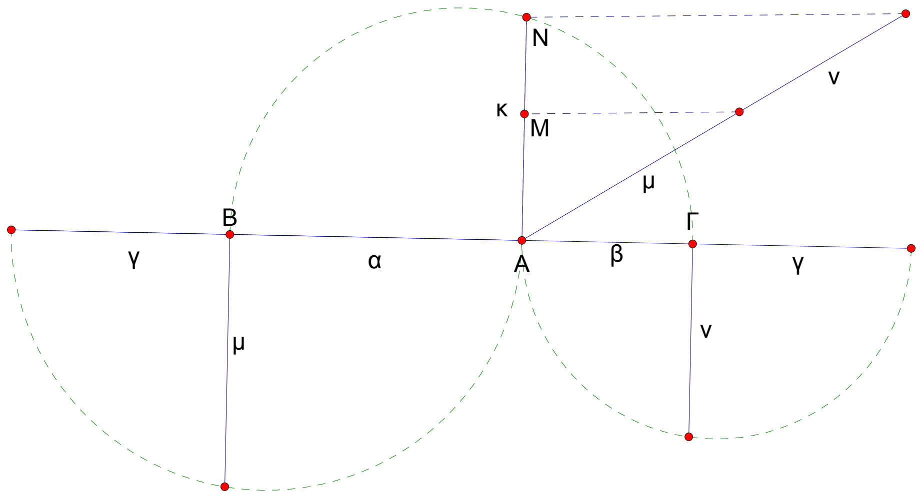
$$\chi=\frac{\alpha\beta}{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2}$$

1. Κατασκευή του χ στην εξίσωση:
$$\sqrt{\alpha\chi}+\sqrt{\beta\chi}=\sqrt{\alpha\beta}$$

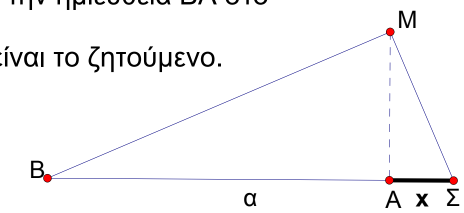
Θεωρούμε τυχαίο τμήμα γ.
Έυκολα και όπως δείχνει το σχήμα κατασκευάζουμε τα τμήματα
$\kappa=\sqrt{\alpha\beta}$, $\nu=\sqrt{\beta\gamma}$, $\mu=\sqrt{\alpha\gamma}$

Χωρίζουμε το ΑΝ=κ σε λόγο $\frac{\mu}{\nu}=\frac{\sqrt{\alpha\gamma}}{\sqrt{\beta\gamma}}=\frac{\sqrt{\alpha\chi}}{\sqrt{\beta\chi}}$.

Εύκολα δείχνουμε ότι $AM=\sqrt{\alpha\chi}$

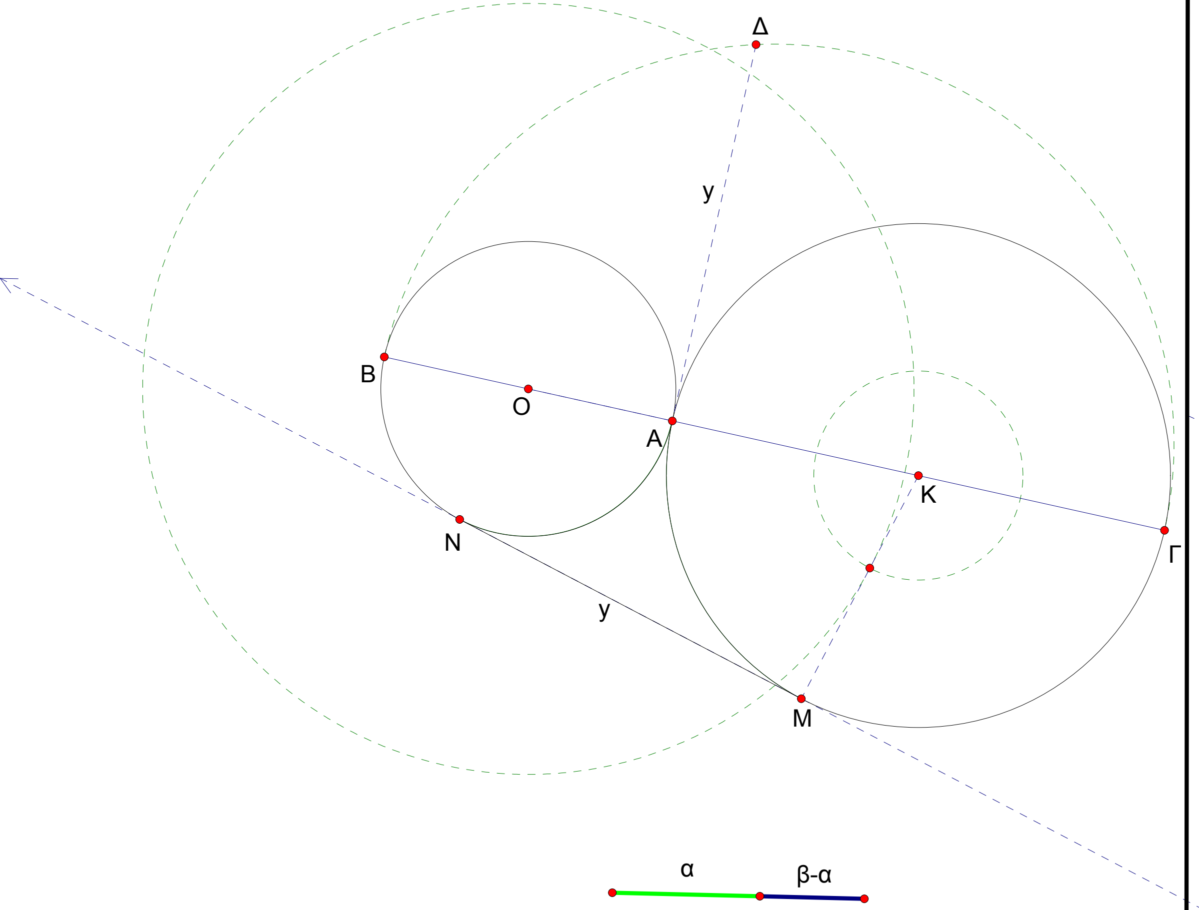


Φέρνουμε την ΜΒ και την κάθετο σ' αυτή η οποία τέμνει την ημιευθεία ΒΑ στο σημείο Σ.
Το τμήμα ΑΣ είναι το ζητούμενο.



2. Κατασκευή
δύο εφαπτόμενων εξωτερικά κύκλων και μιας κοινής τους εφαπτομένης.

Εύκολα κατασκευάζουμε δύο εφαπτόμενους εξωτερικά κύκλους με κέντρα Ο, Κ και ακτίνες α, β αντίστοιχα με α<β.
Η απόσταση του Ο από την ακτίνα η οποία καταλήγει στο σημείο επαφής του κύκλου (Κ,β) θα είναι x και θα πρέπει:
$y^2=(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2=4\alpha\beta=2\alpha.2\beta$. Εύκολα κατασκευάζουμε το y =ΑΔ.
Κάνουμε τους κύκλους (Κ, β-α) και (Ο, y) οι οποίοι τέμνονται σε δύο σημεία. Ενώνουμε το κέντρο του κύκλου Κ με ένα απο τα δύο σημεία με ημιευθεία που τέμνει τον κύκλο (Κ, β) στο Μ.
Φέρνουμε την κάθετο στην ΚΜ στο Μ. Αυτή είναι κοινή εξωτερική εφαπτόμενη των δύο κύκλων.



3. Κατασκευή
τριων κύκλων ανα δύο εφαπτόμενων εξωτερικά και μιας κοινής τους εφαπτομένης.

Ακολουθώντας την προηγούμενη κατασκευή έχουμε τους κύκλους (Ο,α) και (Κ, β) οι οποίοι εφάπτονται εξωτερικά και συγχρόνως εφάπτονται στην ΜΝ. Αναζητάμε την ακτίνα χ του τρίτου κύκλου ο οποίος εφάπτεται σε εσωτερικό σημείο του ΜΝ και συγχρόνως στα τόξα $\overset{\frown}{NA}$, $\overset{\frown}{MA}$ των δύο κύκλων. Αποδεικνύουμε, κατ' αρχήν, ότι ισχύει η σχέση: $2\sqrt{\alpha\chi}+2\sqrt{\beta\chi}=2\sqrt{\alpha\beta}=MN$.
Με τη βοήθεια της 1ης κατασκευής κάνουμε το τμήμα χ.

Κατόπιν χωρίζουμε με το σημείο Ρ το ΜΝ σε λόγο $\frac{MP}{PN}=\frac{\sqrt{\beta\chi}}{\sqrt{\alpha\chi}}$.

Στο Ρ φέρνουμε την κάθετο στο ΜΝ. Κατόπιν σχεδιάζουμε τον κύκλο (Ρ,χ). Το σημείο τομής του με την κάθετο είναι το κέντρο Λ του τρίτου κύκλου.
Σχεδιάζουμε τον κύκλο (Λ,χ).