ΣΗΜΕΙΑ ΔΙΑΦΩΝΙΩΝ

Νίκος Ιωσηφίδης, Μαθηματικός – Φροντιστής, Βέροια

e-mail: iossifid@yahoo.gr

Περίληψη
Στην εργασία αυτή περιλαμβάνονται έννοιες που δεν έχουν καθοριστεί επακριβώς με αποτέλεσμα τις διαφωνίες μεταξύ των μελών της Μαθηματικής Κοινότητας και τη σύγχυση, πράγμα που μετά την αξιωματική θεμελίωση όλων των κλάδων των Μαθηματικών θεωρείται ανεπίτρεπτο.
Θα προσπαθήσουμε εδώ να διευκρινίσουμε τα σημεία των διαφωνιών και να κάνουμε τις προσωπικές μας τοποθετήσεις.

Τα σημεία που επιλέξαμε είναι

- Το λάθος πρόβλημα
- Ερωτήματα τύπου Σωστό - Λάθος
- Επαλήθευση
- Αριθμός ριζών εξίσωσης

Ένα ανεπίτρεπτο φαινόμενο που πολλές φορές παρατηρήσαμε είναι η διαφωνία μελών της Μαθηματικής Κοινότητας σε θέματα που όλοι συμφωνούν. Το οξύμωρο της διαπίστωσης οφείλεται στον μη ακριβή καθορισμό κάποιων μαθηματικών εννοιών.
Μετά την αξιωματική θεμελίωση όλων των κλάδων των Μαθηματικών, κάθε διαφωνία ή παρανόηση στα μαθηματικά είναι αδικαιολόγητη. Όπως φαίνεται όμως κάποιες έννοιες θεωρήθηκαν αυτονόητες και δεν ορίστηκαν. Και ενώ ο μη ορισμός των εννοιών αυτών δημιούργησε διάφορα προβλήματα και σύγχυση, ποτέ δεν έγινε προσπάθεια του ακριβούς προσδιορισμού τους.
Θα προσπαθήσουμε εδώ να ορίσουμε κάποιες έννοιες και να "ξεκαθαρίσουμε" τα σημεία διαφωνιών. Η προσπάθεια αυτή οπωσδήποτε θα συναντήσει τις αντιδράσεις και τις διαφωνίες συναδέλφων, όμως σκοπός της εισήγησης αυτής είναι να θέσει τα ερωτήματα και να κάνει τις πρώτες τοποθετήσεις. Σκοπός της είναι κάποτε να συμφωνήσουμε στα αναφερόμενα θέματα ώστε να μη δημιουργούνται διαφωνίες και ασάφειες που όπως προαναφέραμε στα Μαθηματικά είναι εντελώς αδικαιολόγητες.
Μερικές έννοιες λοιπόν που δεν ορίστηκαν είναι:

1) Λάθος πρόβλημα

Με τον όρο **"λάθος πρόβλημα"** εννοούμε ένα πρόβλημα του οποίου τα δεδομένα δεν είναι συμβιβαστά.

Π. χ το πρόβλημα:

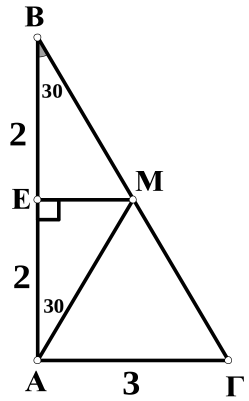
Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α= 90^o), δίνονται α = 6, β = 3, γ = 4. Να βρεθεί το μήκος της διάμεσου ΑΜ

είναι λάθος επειδή σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με Α = 90^o, β = 3 και γ = 4 είναι υποχρεωτικά α = 5, δηλαδή τα δεδομένα είναι μεταξύ τους ασυμβίβαστα.

Σε ένα τέτοιο πρόβλημα δεν έχει νόημα να ζητηθεί η διάμεσος ΑΜ, αφού τέτοιο τρίγωνο δεν υπάρχει. Αν η διάμεσος υπολογιστεί από τη σχέση

$\mu_\alpha = \dfrac{\alpha}{2}$ προκύπτει α = 3, ενώ αν υπολογιστεί από το 1^o θεώρημα των διαμέσων:

$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \dfrac{\alpha^2}{2}$, προκύπτει $\mu_\alpha = \sqrt{\dfrac{7}{2}}$



Μια άλλη λύση που θα οδηγούσε σε διαφορετικό αποτέλεσμα είναι η παρακάτω:

Επειδή $\mathrm{A\Gamma} = \dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$, θα είναι $\hat{\mathrm{B}} = 30^o$, άρα $\hat{\Gamma} = 60^0$ και επειδή η διάμεσος $\mathrm{AM} = \dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$, το τρίγωνο ΑΓΜ είναι ισόπλευρο, άρα $\widehat{\mathrm{MA\Gamma}} = 60^o \Rightarrow \widehat{\mathrm{MAB}} = 30^o$, άρα το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισοσκελές.

Φέρνουμε το ύψος ΜΕ του τριγώνου αυτού που είναι και διάμεσος, άρα ΑΕ = 2

Από το ορθογώνιο ΑΜΕ έχουμε $\mathrm{AM} = \dfrac{\mathrm{AE}}{\sigma\upsilon\nu 30^o} = \dfrac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$

Μπορούμε να κάνουμε και άλλες λύσεις και να βρίσκουμε διαφορετικά αποτελέσματα κάθε φορά.

Σε ένα λάθος πρόβλημα μπορούμε από τα ίδια ασυμβίβαστα δεδομένα, με σωστή εφαρμογή θεωρημάτων να καταλήξουμε σε αντιφατικά συμπεράσματα. Και μετά, από μια λάθος ισότητα να καταλήξουμε σε μια οποιαδήποτε άλλη λάθος ισότητα.

Δείχνουμε πως από τη λάθος ισότητα α = β καταλήγουμε στην οποιαδήποτε ισότητα γ = δ

$\alpha = \beta \Rightarrow \alpha - \beta = 0$ και απλοποιώντας δια $\alpha - \beta \neq 0 \Rightarrow 1 = 0$ και πολλαπλασιάζοντας επί $\gamma - \delta$ προκύπτει $\gamma - \delta = 0 \Rightarrow \gamma = \delta$

Συμπερασματικά:
Δεν μπορεί σε ένα λάθος πρόβλημα να ζητείται να βρούμε κάτι ή να αποδείξουμε κάτι. Αυτό είναι χωρίς νόημα.

Η άποψη ότι δεν ενδιαφέρει το αν τα δεδομένα του προβλήματος είναι συμβιβαστά ή όχι, αλλά μόνο αν από τα δεδομένα του προβλήματος μπορούμε με συνεπαγωγές να καταλήξουμε στο ζητούμενο δεν ευσταθεί. Είναι σαν να ζητούμε να βρούμε τι χρώμα έχει το στυλό που βρίσκεται πάνω σ' ένα γραφείο, ενώ δεν υπάρχει κανένα στυλό. Ή σαν να θέλουμε να δικαιολογήσουμε γιατί το ανύπαρκτο στυλό είναι κόκκινο.
Όσοι υποστηρίζουν την παραπάνω άποψη τη δικαιολογούν με το ότι μας ενδιαφέρει μόνο αν οι συνεπαγωγές είναι σωστές ή λάθος. Ή θεωρούν ότι αν τα δεδομένα είναι λάθος, τότε όλες οι συνεπαγωγές είναι σωστές, δηλαδή η συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$ όταν η p είναι ψευδής, είναι πάντοτε αληθής, ανεξαρτήτως αν η πρόταση q είναι αληθής ή ψευδής. Όπως και αν το εννοούν, μπερδεύουν τις έννοιες: **"πρόβλημα"** και **"απόδειξη".**

Συζητήσεις τέτοιου είδους έγιναν με αφορμή θέματα εξετάσεων όπως αυτό των Πανελλαδικών του 1997[1] στο οποίο καταλήγουμε στα αντιφατικά συμπεράσματα $e = 2$ και $e = 1$[2]

ΘΕΜΑ 3Β ***(1η ΔΕΣΜΗ, 1997)***

Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια,

ώστε, υπάρχει πραγματικός αριθμός α, ώστε να ισχύει:

$$\mathbf{g(x+y)=e^{y}g(x)+e^{x}g(y)+xy+\alpha} \quad \textbf{για κάθε } \mathbf{x, y \in \mathbb{R}}$$

Να αποδείξετε ότι:

- **i)** $\mathbf{g(0) = -\alpha}$
- **ii)** $\mathbf{g'(x) = g(x) + g'(0)e^{x} + x \quad \forall x \in \mathbb{R}}$

Για την απόδειξη του (ii) οι υποστηρικτές της άποψης ότι δεν μας ενδιαφέρει αν τα δεδομένα του προβλήματος είναι σωστά, παραγωγίζουν την αρχική σχέση με τους γνωστούς κανόνες παραγώγισης του αθροίσματος, γινομένου κ.λ.π. Πως όμως μπορείς να παραγωγίσεις ανύπαρκτη συνάρτηση με τους κανόνες παραγώγισης των υπαρκτών συναρτήσεων;

Παρόμοιο και το λάθος στο θέμα του Μαθηματικού Τμήματος Αθηνών του 1947[3] για το οποίο έγιναν παρόμοιες συζητήσεις.

---

[1] Βλ απόδειξη του λάθους σε άρθρο μας στην εφημερίδα ΛΑΟΣ της Ημαθίας της Παρ 4 Ιουλίου 1997 και [2]
[2] Πρακτικά Μαθηματικής Εβδομάδας 2007, σελ. 126 και 127
[3] Βλ. άρθρο του Γιάννη Θωμαΐδη στο περιοδικό ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ της ΕΜΕ Ημαθίας τεύχος 4, σελ 29-37

Στα λάθος προβλήματα πρέπει να συμπεριλάβουμε και εκείνα στα οποία η αδυναμία απόδειξης συνύπαρξης των δεδομένων δημιουργεί υπόνοιες για λάθος. Σαν παράδειγμα αναφέρουμε το:

ΘΕΜΑ 1ο ***(1η ΔΕΣΜΗ 1998)***

Β) Η συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$\mathbf{f(f(x))+f^3(x)=2x+3, x\in\mathbb{R}}$$

α) Να αποδείξετε ότι …

Υπάρχει άραγε η παραπάνω συνάρτηση f;

Η απόδειξη της ύπαρξης ή μη της παραπάνω συνάρτησης δε φαίνεται καθόλου εύκολη. Τι νόημα θα έχει η οποιαδήποτε απόδειξη αν αποδειχθεί ότι η παραπάνω συνάρτηση δεν υπάρχει; Και πως θα χρησιμοποιήσουμε τις γνωστές ιδιότητες που ισχύουν σε υπαρκτές συναρτήσεις σε ανύπαρκτες συναρτήσεις;

Παρόμοια θέματα, θέματα δηλαδή που αμφισβητούνται τα δεδομένα του προβλήματος έχουν δοθεί και άλλες φορές στις Πανελλαδικές εξετάσεις[4]

Συμπερασματικά, δεν πρέπει να δίνονται προβλήματα με αμφισβητούμενα δεδομένα, επειδή σε τέτοια προβλήματα η κάθε συνεπαγωγή και το κάθε συμπέρασμα είναι αμφισβητούμενα.

2) Ερωτήματα τύπου Σωστό – Λάθος

Στα ερωτήματα αυτά το σύνηθες είναι να δίνονται σχέσεις που δεν έχουν οριστεί επαρκώς, δημιουργώντας ποικίλα ερωτήματα.

Σαν παράδειγμα αναφέρουμε το εξής:

Χαρακτηρίστε ως Σωστή ή Λάθος την πρόταση: $\sqrt{\alpha\cdot\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$

Η συνηθισμένη απάντηση είναι ότι η πρόταση είναι λάθος, αφού το 1ο μέλος ορίζεται και όταν $\alpha < 0$ και $\beta < 0$, ενώ το 2ο μέλος στην περίπτωση αυτή δεν ορίζεται.

Για να μπορέσουμε να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό πρέπει να δοθούν τα σύνολα αναφοράς των α και β. Εδώ όμως τέτοια σύνολα δε δόθηκαν και **το ερώτημα είναι χωρίς νόημα.**

Το ερώτημα θα ήταν σωστό αν διατυπώνονταν με τη μορφή:

[4] Βλέπε σχετικά παραδείγματα στο [2]

Χαρακτηρίστε ως Σωστή ή Λάθος την πρόταση:
$\sqrt{\alpha\cdot\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$ **για κάθε α, β ≥0**

Πρέπει να συμφωνήσουμε ότι αφού τέθηκε το σύμβολο $\sqrt{\alpha}$, αυτό έχει νόημα, δηλαδή αυτόματα πρέπει να δεχτούμε ότι $\alpha \geq 0$ και δεν πρέπει να μας απασχολεί η περίπτωση $\alpha < 0$. Όπως όταν δίνεται ότι $f'(x)>0$ δε τίθεται το ερώτημα αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, αλλά δεχόμαστε αυτόματα ότι είναι.

Το ερώτημα θα ήταν επίσης σωστό αν έμπαινε με τη μορφή:

Μπορούμε για κάθε α, β $\in\mathbb{R}$ να γράψουμε: $\sqrt{\alpha\cdot\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$ **;**
και τότε φυσικά η απάντηση θα ήταν όχι.

Παρόμοιο ερώτημα είναι και το παρακάτω που έχουμε δει πολλές φορές σε εξετάσεις της Β΄ Λυκείου:

Ισχύει log(α.β) = logα + logβ;

το οποίο σύμφωνα με όσα είπαμε είναι χωρίς νόημα αν δε δοθούν τα σύνολα αναφοράς των α και β.

Ανάλογο ερώτημα και το παρακάτω:

Αν δύο ευθείες είναι κάθετες, το γινόμενο των συντελεστών διευθύνσεών τους είναι ίσο με -1

Η αναμενόμενη απάντηση ήταν πως η πρόταση είναι λάθος με το σκεπτικό ότι μπορεί να μην ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης της μιας ευθείας. Όταν όμως στο ερώτημα αναφέρονται και οι δύο συντελεστές διεύθυνσης, αυτό που πρέπει να καταλαβαίνει κάποιος είναι ότι οι συντελεστές διεύθυνσης υπάρχουν, άρα η πρόταση είναι σωστή.

Πολλά ερωτήματα του είδους αυτού δηλαδή του τύπου Σ – Λ τέθηκαν στις Πανελλαδικές εξετάσεις στα Μαθηματικά Γενικής Παιδείας
Στα ερωτήματα που αναφέρονται παρακάτω το ερώτημα ήταν αν η πρόταση που ακολουθεί είναι σωστή ή λάθος. Αναφέρουμε δύο από αυτά

<u>Πανελλαδικές 2005, Μαθηματικά Γενικής Παιδείας</u>

Ισχύει: $$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Αν δε δοθεί το σύνολο αναφοράς της μεταβλητής x, τότε το ερώτημα δεν μπορεί να απαντηθεί. Π.χ η πρόταση θα ήταν σωστή αν ως σύνολο αναφοράς της μεταβλητής x λαμβάνονταν το σύνολο των σημείων για τα οποία $f(x) = 0$ ή $g'(x)=0$

Πανελλαδικές 2007, Μαθηματικά Γενικής Παιδείας
Αν f και g δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε για την παράγωγο της σύνθετης συνάρτησης ισχύει $(f(g(x))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

Αν δε δοθεί το σύνολο αναφοράς της μεταβλητής x το παραπάνω ερώτημα είναι χωρίς νόημα. Είναι σαν να ρωτούμε: Ισχύει $x^2 = 9$;

Συμπερασματικά:
Κάθε σχέση που περιέχει μεταβλητές είναι χωρίς νόημα αν δε δίνεται και το πεδίο ορισμού των μεταβλητών.

3) Επαλήθευση

Ένα άλλο σημαντικό θέμα που προκαλεί διαφωνίες και τριβές και πρέπει να απαντηθεί είναι η επαλήθευση σε κάποια είδη προβλημάτων.
Το θέμα έχει γίνει πολύπλοκο επειδή σιωπηρά και χωρίς καμία μαθηματική αιτιολόγηση έγιναν αποδεκτά κάποια πράγματα.

Αναφέρουμε ένα τέτοιο πρόβλημα σε τρεις διαφορετικές μορφές:

α) Να προσδιοριστεί ο $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει: $\alpha^x \geq x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β) Αν ισχύει $\alpha^x \geq x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ αποδείξτε ότι α = e

γ) Αν ισχύει $\alpha^x \geq x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ βρείτε τον α

Λύση του (α)
Η συνήθης λύση είναι να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - x - 1$ για την οποία ισχύει $f(x) \geq 0 = f(0)$, δηλαδή η f παρουσιάζει στο 0 ολικό, άρα και τοπικό ελάχιστο. Επομένως $f'(0) = 0$ από την οποία και προκύπτει α = e
Η επαλήθευση εδώ κρίνεται απαραίτητη επειδή η συνθήκη $f'(0) = 0$ **δεν εξασφαλίζει** ότι η f θα έχει στο σημείο 0 ολικό ελάχιστο.
Μετά την παραπάνω λύση δηλαδή πρέπει να αποδείξουμε ότι πράγματι για α = e η f παρουσιάζει στο 0 ολικό ελάχιστό ίσο με 0.

Λύση του (β)
Στην περίπτωση αυτή η λύση είναι η ίδια, όμως για τους περισσότερους συναδέλφους εδώ **δε χρειάζεται** επαλήθευση.
Η επικρατούσα άποψη είναι ότι:
Αφού **δόθηκε** ότι η παραπάνω σχέση ισχύει, δεν αμφισβητείται η ύπαρξη του α, και αφού βρήκαμε μια μοναδική τιμή για το α, η τιμή αυτή είναι δεκτή. Αν βρίσκαμε δύο ή περισσότερες τιμές, τότε μόνο θα έπρεπε να γίνει επαλήθευση.

Λύση του (γ)

Η λύση του (γ) είναι πάλι η ίδια και η επικρατούσα άποψη είναι ότι δεν χρειάζεται επαλήθευση, αφού δόθηκε ότι η σχέση ισχύει, επομένως η μοναδική τιμή του α που βρήκαμε είναι δεκτή.
Εδώ φτάνουμε σε μια παράλογη λογική. Ότι δηλαδή το αν θα κάνουμε επαλήθευση ή όχι δεν εξαρτιέται από τη διαδικασία της λύσης, αλλά από το αποτέλεσμα που θα βρούμε. Κάτι τέτοιο όμως είναι απαράδεκτο, επειδή

Η επαλήθευση ενός προβλήματος είναι αναγκαιότητα της διαδικασίας της λύσης και όχι του αποτελέσματος. Αν δηλαδή η λύση που κάνουμε δεν εξασφαλίζει ότι όλα τα δεδομένα του προβλήματος θα ισχύουν, τότε η επαλήθευση είναι υποχρεωτική, ενώ αν η λύση εξασφαλίζει ότι θα ισχύουν όλα τα δεδομένα, δε χρειάζεται επαλήθευση.

Έτσι δεν κάνουμε επαλήθευση όταν λύνουμε εξισώσεις $2^{ου}$ βαθμού, επειδή η διαδικασία της λύσης (απόδειξη του σχετικού τύπου) αποδεικνύει ότι και οι δύο ρίζες που βρίσκουμε επαληθεύουν την εξίσωση. Αντίθετα, σε εξισώσεις με ριζικά, αν υψώσουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης στο τετράγωνο θα χρειαστεί **οπωσδήποτε** επαλήθευση, επειδή μετά την ύψωση στο τετράγωνο, η νέα εξίσωση δεν είναι ισοδύναμη με την προηγούμενη (εκτός αν τεθούν οι περιορισμοί για να είναι οι λύσεις δεκτές).

Ειδικά για τη (γ) παραλλαγή πρέπει να σημειώσουμε ότι το ενδεχόμενο να μην υπάρχει καμία τιμή του α που να επαληθεύει την $\alpha^x \geq x+1$ είναι πιθανό. Είναι σύνηθες στα μαθηματικά να ζητείται η τιμή μιας μεταβλητής ώστε να ισχύει μια σχέση και τέτοια τιμή να μην υπάρχει. Το πρόβλημα είναι απόλυτα σωστό. Αν π.χ το ερώτημα δίνονταν με τη μορφή:

Αν ισχύει $\alpha^x \leq x+1$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$ βρείτε τον α,

τότε η διαδικασία θα ήταν η ίδια, αλλά η μοναδική τιμή του α (δηλ. α=e) δεν θα ήταν δεκτή.

Για τα προβλήματα του είδους αυτού δεν θα συζητήσουμε εδώ, με δυο λόγια μόνο θα πούμε ότι είναι παραπλανητικά και δεν πρέπει να τίθενται με τη μορφή αυτή, δηλαδή βρείτε τον α, και η απάντηση να είναι “δεν υπάρχει α”.

Η δική μας τοποθέτηση είναι ότι και στη 2η και στην $3^η$ περίπτωση **η επαλήθευση είναι απαραίτητη.**

Δίνουμε δύο σχετικά θέματα που δόθηκαν στις Πανελλαδικές εξετάσεις.
Η επικρατούσα άποψη είναι ότι στο $1^ο$ θέμα (του 2000) δε χρειάζεται επαλήθευση, ενώ στο θέμα του 2004 η επαλήθευση είναι απαραίτητη. Για να αντικρούσουμε τον ισχυρισμό ότι στο θέμα του 2000 η επαλήθευση δεν είναι απαραίτητη, κατασκευάσαμε το $3^ο$ παράδειγμα.

ΘΕΜΑ $4^ο$ *(Θετική Κατεύθυνση, Ιούνιος 2000)*

Τη χρονική στιγμή t=0 χορηγείται σ' έναν ασθενή ένα φάρμακο. Η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση

$$f(t)=\frac{\alpha t}{1+(\frac{t}{\beta})^2},\quad t\geq 0$$

όπου α και β είναι σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί και ο χρόνος t μετριέται σε ώρες. Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

α) Βρείτε τις σταθερές α και β κ.λ.π

ΘΕΜΑ 2Β. *(Επαναληπτικές εξετάσεις Ιούλιος 2004)*

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=2^x+m^x-4^x-5^x$ όπου $m\in R$, $m>0$

α) Να βρείτε το m ώστε f(x) ≥ 0 για κάθε $x\in\mathbb{R}$[5]

Παράδειγμα όμοιο με αυτό του 2000

Το παράδειγμα αυτό είναι όμοιο με αυτό των εξετάσεων αλλά η ανάγκη της επαλήθευσης είναι ολοφάνερη.

Δίνεται ότι η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha x^2 + (\alpha^2 + \beta)x - \beta$ για x = 2 παρουσιάζει ολικό μέγιστο ίσο με 1. Να βρεθούν τα α και β.

Παίρνοντας τις σχέσεις f(2) = 1 και $f'(2)=0$ καταλήγουμε στο σύστημα

$$\begin{cases}4\alpha+2\alpha^2+\beta=1\\ 4\alpha+\alpha^2+\beta=0\end{cases}$$

από τη λύση του οποίου βρίσκουμε:
(α = -1 και β = 3) ή (α = 1 και β = -5)
Από τα δύο αυτά ζεύγη λύσεων μόνο το πρώτο επαληθεύει τις συνθήκες του προβλήματος και είναι δεκτό. Το άλλο ζεύγος α = 1 και β = -5 δίνει
$f(x) = x^2 - 4x + 5$ η οποία για x = 2 δίνει ελάχιστη (και όχι μέγιστη τιμή) ίση με 1.

Συμπερασματικά:
Η λύση δεν πρέπει να αφήνει την παραμικρή αμφιβολία για την ορθότητα και την πληρότητά της. Η επαλήθευση πρέπει να είναι απόρροια της διαδικασίας της λύσης και όχι του αποτελέσματος που βρίσκουμε και να εξασφαλίζει ότι τα δεδομένα του προβλήματος πράγματι ισχύουν.

[5] Στο βιβλίο των Χαρ. Στεργίου, Χρ. Νάκη, Ιωαν. Στεργίου ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ, ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ, Εκδόσεις Σαββάλα 2006 άσκ. 5.85 σελ 246 προστίθεται εύστοχα το ερώτημα: *Είναι η τιμή αυτή του m δεκτή;*

Έτσι σε όλα τα παραπάνω θέματα η επαλήθευση είναι απαραίτητη

4) Αριθμός ριζών εξίσωσης

Υπάρχουν δύο διαφορετικές περιπτώσεις στις οποίες μπορούν να δημιουργηθούν διαφωνίες ή σύγχυση. Αναφέρουμε κάθε περίπτωση ξεχωριστά. Αν δεν υπήρχαν θέματα Πανελλαδικών εξετάσεων με σχετικά ερωτήματα, το θέμα θα περνούσε απαρατήρητο. Επειδή όμως και τα δέκατα της βαθμολογίας είναι καθοριστικά για τον διαγωνιζόμενο, αυτό μας υποχρεώνει να επισημάνουμε κάποιες ατέλειες στη διατύπωση των ερωτημάτων και καταθέσουμε τη δική μας άποψη.

Περίπτωση 1η

Στο παρακάτω πρόβλημα

Αν α, β, γ, $\in\mathbb{R}$ με α < β < γ να αποδειχθεί ότι η εξίσωση

$$\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}+\frac{1}{x-\gamma}=0$$ **έχει δύο ρίζες.**

Τι εννοούμε εδώ λέγοντας δύο ρίζες; Δύο **ακριβώς** ρίζες ή **τουλάχιστον** δύο ρίζες;

Η έννοια αυτή πρέπει να διευκρινιστεί. Το ερώτημα με τον τρόπο που τέθηκε είναι ασαφές. Πρέπει οπωσδήποτε να προστεθεί η αντίστοιχη λέξη.

Περίπτωση 2η

Στο παρακάτω πρόβλημα:

Βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης: $\mathbf{x^3-3x+2=0}$ **(1)**

που λύνεται συνήθως με τη βοήθεια του συνόλου τιμών συνάρτησης (όταν δεν μπορούν να βρεθούν οι ρίζες) η απάντηση είναι ότι υπάρχουν δύο ρίζες

Η (1) γράφεται ισοδύναμα $(x-1)^2(x+2)=0$ από την οποία προκύπτουν ως ρίζες οι αριθμοί 1 και -2. Η ρίζα όμως x = 1 είναι διπλή.

Η σωστή απάντηση λοιπόν είναι ότι η εξίσωση έχει 3 ρίζες, αφού σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας κάθε πολυώνυμο νιοστού βαθμού με συντελεστές από το $\mathbb{C}$ έχει ακριβώς ν ρίζες στο $\mathbb{C}$.

Το λάθος που γίνεται εδώ είναι να θεωρούμε ότι στο πλήθος των ριζών περιλαμβάνονται μόνο οι διαφορετικές ρίζες.

Summary

Included in this work are meanings which have not been exactly determined, resulting in disagreements among members of the Mathematic Community, and confusion, something which, after the axiomatic foundation of all the branches of Mathematics, is considered unacceptable.

We will now attempt to clarify the points of disagreement and make our own personal statements.

The points we have chosen are:

- The error problem
- Questions of the type Right - Wrong
- Verification
- Number of roots of equation

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ:

[1] Περιοδικό ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ του Παραρτήματος της Ε.Μ.Ε Ημαθίας

[2] Εισήγησή μας στη ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΒΔΟΜΑΔΑ 2007 της Θεσσαλονίκης με τίτλο: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ. ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ ΚΑΙ ΔΙΕΥΚΡΙΝΙΣΕΙΣ ΜΕ ΑΦΟΡΜΗ ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ