Θέματα μιγαδικών από τις Πανελλήνιες Εξετάσεις

Επιμέλεια : Μπάμπης Στεργίου , Σεπτέμβριος 2014

Θέμα 1ο

α. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει:

$$|z+16|=4|z+1|$$

β. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει:

$$|z-1|=|z-i|$$

(Ιούλιος 2001)

Θέμα 2ο

Δίνεται ο μιγαδικός z και έστω $f(z)=\dfrac{2+i\bar{z}}{1-\bar{z}}, z\neq 1$.

α) Να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού f(2).

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $w=[f(2)]^{2004}$ είναι πραγματικός.

γ) Να αποδείξετε ότι $\left|\dfrac{f(z)-2}{f(z)+i}\right|=|z|$.

δ) Αν $|z|=1$ και Μ είναι η εικόνα του f(z) στο μιγαδικό επίπεδο, να αποδείξετε ότι το Μ κινείται σε ευθεία, της οποίας να βρείτε την εξίσωση. **(ΟΕΦΕ – 2001)**

Θέμα 3ο

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z=\dfrac{2}{1+i}$

α) Να γράψετε τον μιγαδικό αριθμό z στη μορφή z = x + yi, όπου x, y ∈ **R**.

β) Να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο Κ(2,0) και ακτίνα ρ = $\sqrt{2}$.

(Εσπερινά 2001)

Θέματα από το 2003 και μετά.

Θέμα 4ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z = α + βi, όπου α,β∈ℝ και w = 3z – i$\bar{z}$ +4, όπου $\bar{z}$ είναι ο συζυγής του z.

α. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{Re}(w)=3\alpha-\beta+4$

$$\mathrm{Im}(w) = 3\beta-\alpha.$$

β. Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση y = x – 12, τότε οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση y = x – 2.

γ. Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς z, οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία με εξίσωση y = x – 2, έχει το ελάχιστο μέτρο.

(Μάιος 2003)

Θέμα 5ο

α. Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο (Σ) των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις σχέσεις:
$|z| = 2$ και $\mathrm{Im}(z) \geq 0$.

β. Να αποδείξετε ότι, αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z κινείται στο σύνολο (Σ), τότε η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{4}{z}\right)$ κινείται σε ευθύγραμμο τμήμα το οποίο βρίσκεται στον άξονα x΄x .

(Επαναληπτικές 2003)

Θέμα 6ο

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z = x + yi$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί και $w = \frac{i\,(i+z)}{i-z}$ με $z \neq i$.

Να αποδείξετε ότι :

α. $w = \frac{2x}{x^2+(y-1)^2} + \frac{1-x^2-y^2}{x^2+(y-1)^2}\,i$,

β. αν ο w είναι πραγματικός αριθμός, τότε η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο κέντρου O(0,0) και ακτίνας $\rho_1 = 1$ και

γ. αν ο z είναι πραγματικός αριθμός, τότε η εικόνα του w ανήκει σε κύκλο κέντρου O(0 , 0) και ακτίνας $\rho_2 = 1$.

(Εσπερινά 2003)

Θέμα 7ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(z) = \frac{z+i}{z}$, όπου z μιγαδικός αριθμός με $z \neq 0$.

α) Αν $|f(z)| = |f(\bar{z})|$, να αποδείξετε ότι ο z είναι πραγματικός αριθμός.

β) Αν $|f(z)| = 1$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο.

γ) Αν $\mathrm{Re}(f(z)) = 2$, να αποδείξετε ότι οι εικόνες του μιγαδικού αριθμού z, βρίσκονται σε κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.

(Ομογενείς 2003)

Θέμα 8ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = x + yi$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί, για τους οποίους υπάρχει $\alpha \in R$ ώστε να ισχύει: $\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 i = \alpha + (1-\alpha)i$

Να αποδείξετε ότι:

α. αν Im(z) = 0, τότε α = 1.

β. αν α = 0, τότε $\mathbf{z^2 + 1 = 0}$

γ. για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει ότι : $\mathbf{0 \leq \alpha \leq 1}$

δ. οι εικόνες M των μμιγαδικών αυτών αριθμών z στο μμιγαδικό επίπεδο ανήκουν σε κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

(Εσπερινά 2004)

Θέμα 9ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = x + yi$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί, για τους οποίους υπάρχει $\kappa \in R$ ώστε να ισχύει: $x = 3 - \kappa$ και $y = 2\kappa + 1$

Να αποδείξετε ότι:

α) αν 3 Re(z) + 4 Im(z) = 3, τότε $k = -2$.

β) αν $|z-1| = \sqrt{5}$ τότε $|z| = \sqrt{10}$.

γ) οι εικόνες M των μιγαδικών αυτών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν σε ευθεία, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

(Εσπερινά επαναληπτικές 2004)

Θέμα 10ο

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός z, με $z \neq \pm i$, και $w = \dfrac{z}{z^2+1}$.

α) Να αποδείξετε ότι εάν ο w είναι πραγματικός, τότε ο z είναι πραγματικός ή $|z| = 1$.

β) Να λύσετε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών την εξίσωση $\dfrac{z}{z^2+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

γ) Αν z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος β, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$K = \frac{(z_1 \bullet z_2)^3 - i}{4 + (z_1 + z_2)^2}.$$

(Ομογενείς 2004)

Θέμα 11ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$.

α. Να αποδείξετε ότι: $\overline{z_1} = \dfrac{9}{z_1}$

β. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1}$ είναι πραγματικός .

γ. Να αποδείξετε ότι: $|z_1 + z_2 + z_3| = \dfrac{1}{3}|z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1|$.

(Μάιος 2005)

Θέμα 12ο

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει

$z_1 + z_2 = 4+4i$ και $2z_1 - \overline{z_2} = 5+5i$, να βρείτε τους z_1, z_2.

β. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w ισχύουν

$$|z - 1 - 3i| \leq \sqrt{2} \text{ και } |w - 3 - i| \leq \sqrt{2}:$$

i. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί z, w έτσι, ώστε
z = w και

ii. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z - w|$.

(Επαναληπτικές 2005)

Θέμα 13ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 3+i$ και $z_2 = 1-3i$.

α) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{z_1}{z_2} = i$ και $|iz_1 + z_2|^2 = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι $z_1^{2006} + z_2^{2006} = 0$.

γ) Θεωρούμε το μιγαδικό αριθμό $w = \dfrac{kz_1 - iz_2}{z_2 - kz_2}, k \in R - \{1\}$. Να αποδείξετε ότι για κάθε $k \in R - \{1\}$ ισχύει ότι $\mathrm{Im}(w) = -1$.

(Ομογενείς 2005)

Θέμα 14ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 με

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \qquad \text{και} \qquad z_1 + z_2 + z_3 = 0$$

α. Να αποδείξετε ότι:

i. $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$.

ii. $|z_1 - z_2|^2 \leq 4$ και $\mathrm{Re}(z_1 \bar{z}_2) \geq -1$

β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο, καθώς και το είδος του τριγώνου που αυτές σχηματίζουν.

(Μάιος – 2006)

Θέμα 15ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 4x + 13 = 0$ (1)

α. Να λυθεί στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών η εξίσωση (1).

β. Αν z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1), τότε να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $A = |z_1|^2 - 2|z_1 \cdot z_2| + \sqrt{13}\,|\bar{z}_2| + i^{2006}$.

γ. Αν $z_1 = 2+3i$, τότε να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει:

$$|z - z_1| = 5$$

(Εσπερινά 2006)

Θέμα 16ο

Έστω ότι για τον μιγαδικό αριθμό z ισχύει $(5z-1)^5 = (z-5)^5$.

α) Να αποδείξετε ότι $|5z-1| = |z-5|$.

β) Να αποδείξετε ότι $|z| = 1$.

γ) Αν $w = 5z+1$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων M(w) στο μιγαδικό επίπεδο.

(Ομογενείς 2006)

Θέμα 17ο

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z=\dfrac{2+\alpha i}{\alpha+2i}$ με α ε IR .

α. Να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο O(0,0) και ακτίνα ρ =1.

β. Έστω z_1 , z_2 οι μιγαδικοί που προκύπτουν από τον τύπο $z=\dfrac{2+\alpha i}{\alpha+2i}$

για α = 0 και α = 2 αντίστοιχα.

i. Να βρεθεί η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 .

ii. Να αποδειχθεί ότι ισχύει: $(z_1)^{2\nu}=(-z_2)^{\nu}$ για κάθε φυσικό αριθμό ν.

(Μάιος 2007)

Θέμα 18ο

Δίνονται οι μιγαδικοί $z_1=\alpha+\beta i$ και $z_2=\dfrac{2-\overline{z}_1}{2+\overline{z}_1}$ όπου $\alpha,\beta\in R$, $\beta\neq 0$. Δίνεται επίσης ότι $z_2-z_1\in R$.

Α) Να αποδείξετε ότι $z_2-z_1=1$

Β) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z_1, στο μιγαδικό επίπεδο.

Γ) Αν ο αριθμός z_1^2 είναι φανταστικός και $\alpha\beta>0$, να υπολογιστεί ο z_1 και να αποδειχθεί ότι $(z_1+1+i)^{20}-(\overline{z}_1+1-i)^{20}=0$

(Επαναληπτικές 2007)

Θέμα 19ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z = (λ - 2) + 2λi, όπου $\lambda\in R$.

α. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z.

β. Αν ισχύει $z+\overline{z}=2$ να βρείτε το $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right)$.

γ. Αν $|z|=2$ και Im(z)≠0, να βρείτε το λ.

(Εσπερινά 2007)

Θέμα 20ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1=i,\ z_2=1,$ και $z_3=1+i.$

α . Να αποδείξετε ότι : $|z_1|^2+|z_2|^2=|z_3|^2$.

β . Αν για το μιγαδικό z ισχύει ότι: $|z-z_1|=|z-z_2|$, τότε να αποδείξετε

i) $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Im}(z)$.

ii) για $z\neq 0$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=\dfrac{z}{\overline{z}}+\dfrac{\overline{z}}{z}$.

(Ομογενείς 2007)

ΘΕΜΑ 21ο

Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν

$$|(i+2\sqrt{2})z| = 6 \quad \text{και} \quad |w-(1-i)| = |w-(3-3i)|$$

τότε να βρείτε:

α. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z .

β. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w .

γ. την ελάχιστη τιμή του $|w|$

δ. την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$

(Μάιος 2008)

Θέμα 22ο

Δίνεται ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2+\beta z+\gamma=0$, όπου β και γ πραγματικοί αριθμοί.

α. Να αποδείξετε ότι $\beta=-1$ και $\gamma=1$.

β. Να αποδείξετε ότι $z_1^3 = -1$

γ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού αριθμού w, για τον οποίο ισχύει:

$$|w| = |z_1 - \bar{z}_1|$$

(Ιούνιος 2008)

Θέμα 23ο

Δίνεται η εξίσωση $3z^2+\lambda z+\mu=0$, όπου λ, μ είναι πραγματικοί αριθμοί.

Α. Αν ο αριθμός $z_1 = 1 + i$ είναι ρίζα της εξίσωσης, να αποδείξετε ότι $\lambda = -6$, $\mu = 6$ και να βρείτε τη δεύτερη ρίζα z_2 της εξίσωσης.

Β. Να αποδείξετε ότι:

α. $z_1^2 + z_2^2 = 0$

β. $z_1^{2008} + z_2^{2008} = 2^{1005}$

(Εσπερινά 2008)

Θέμα 24ο

Α. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $\mathbf{z = k+(k+1)i,\ k \in R}$.

α. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι η ευθεία y=x+1.

β. Ποιοι από αυτούς τους μιγαδικούς αριθμούς έχουν $|z|=1$. ;

Β. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α,β ισχύει $a^2+\beta^2+8=(1-i)^4\beta-(1+i)^4\alpha$, να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = -2$.

(Ομογενείς 2008)

Θέμα 25ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = (2\lambda+1)+(2\lambda-1)i$, $\lambda \in R$

Α.α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in R$.

β. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_0 = 1 - i$ έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο.

Β. Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί w οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση

$$|w|^2 + \overline{w} - 12 = z_0$$

όπου z_0 είναι ο μιγαδικός αριθμός που αναφέρεται στο προηγούμενο ερώτημα.

(Μάιος 2009)

Θέμα 26ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει: $(2-i)z+(2+i)\overline{z}-8=0$

α. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z = x + yi$ οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση.

β. Να βρείτε τον μοναδικό πραγματικό αριθμό και τον μοναδικό φανταστικό αριθμό οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση.

γ. Για τους αριθμούς που βρέθηκαν στο προηγούμενο ερώτημα να αποδείξετε ότι

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=40$$

(Επαναληπτικές 2009)

Θέμα 27ο

Δίνεται η εξίσωση $z+\dfrac{1}{z}=-1, z\in C$ και z_1, z_2 οι ρίζες της. Να αποδείξετε ότι:

α) $z_1 \cdot z_2 = 1$ και $z_1^3 = 1$.

β) $\left(z_1^{2009}+z_2^{2009}\right)\in \Re$.

γ) $z_1^8+\dfrac{1}{z_2^{10}}+1=0$

δ) Αν $f(x)$ συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ με $f(0)-2=\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}$ και $f(1)=\dfrac{1}{2z_1}+\dfrac{1}{2z_2}-\dfrac{3}{2}$ τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ ώστε $f(x_0)=3x_0-2$.

ε) Αν Γ είναι η εικόνα του μιγαδικού $w=2z_1+2z_2$ και Α, Β οι εικόνες των z_1 και z_2 αντίστοιχα, να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

(ΟΕΦΕ 2009)

Θέμα 28ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί

$$z_1 = 2 + 3i \quad \text{και} \quad z_2 = (1-i)^2 + 3i^{2009} + 1.$$

α. Να αποδείξετε ότι $z_2 = 1 + i$.

β. Να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού αριθμού $\overline{z_1} - z_2$.

γ. Να εκφράσετε το πηλίκο $\frac{z_1}{z_2}$ στη μορφή κ + λi, όπου κ, $\lambda \in R$.

(Εσπερινά 2009)

Θέμα 29ο

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z=\frac{1}{1+i}-\frac{-i(i-3)}{2}$.

α. Να αποδείξετε ότι: $-\bar{z}=-1+i, z^2=2i, z^3=-2+2i$.

β. Αν Α, Β, Γ είναι οι εικόνες των μιγαδικών $-\bar{z}, z^2, z^3$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

γ. Να αποδείξετε ότι: $\left|z^3-z^2\right|^2=\left|z^2+\bar{z}\right|^2+\left|z^3+\bar{z}\right|^2$.

(Ομογενείς 2009)

Θέμα 30ο

Δίνεται η εξίσωση $z+\frac{2}{z}=2$ όπου $z\in C$ με $z\neq 0$

Β1. Να βρείτε τις ρίζες z_1 και z_2 της εξίσωσης.

Β2. Να αποδείξετε ότι

$$z_1^{2010}+z_2^{2010}=0$$

Β3. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει $|w-4+3i|=|z_1-z_2|$

τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο.

Β4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος **Β3**, να αποδείξετε ότι $3\leq|w|\leq 7$

(Μάιος 2010)

Θέμα 31ο

Έστω ότι οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 είναι οι ρίζες εξίσωσης δευτέρου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές για τις οποίες ισχύουν

$$z_1+z_2=-2 \text{ και } z_1\cdot z_2=5$$

Β1. Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2

Β2. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει η σχέση

$$|w-z_1|^2+|w-z_2|^2=|z_1-z_2|^2$$

να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος με εξίσωση $(x+1)^2+y^2=4$

Β3. Από τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος **Β2** να βρείτε εκείνους για τους οποίους ισχύει

$$2\cdot \mathrm{Re}(w)+\mathrm{Im}(w)=0$$

Β4. Αν w_1, w_2 είναι δύο από τους μιγαδικούς w του ερωτήματος **Β2** με την ιδιότητα $|w_1-w_2|=4$, να αποδείξετε ότι $|w_1+w_2|=2$.

(Επαναληπτικές 2010)

Θέμα 32^{O}

Οι μιγαδικοί αριθμοί z, w συνδέονται με τη σχέση $z=\dfrac{1+2w}{1-w}$ και η εικόνα του w ανήκει στον κύκλο με κέντρο Κ(-1,0) και ακτίνα ρ=1.

α) Να ααποδείξετε ότι η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο με κέντρο το Ο(0,0) και ακτίνα ρ=1.

β) Αν $|z|=1(1)$ και z_1,z_2,z_3 οι εικόνες τριών μιγαδικών αριθμών για τους οποίους ισχύει η σχέση (1) , να αποδείξετε ότι:

i) Ο αριθμός $\alpha=\dfrac{z_1+z_2}{z_3}+\dfrac{z_2+z_3}{z_1}+\dfrac{z_1+z_3}{z_2}$ είναι πραγματικός.

ii) Αν επιπλέον $z_1+z_2+z_3=0$ τότε $\operatorname{Re}\left(\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_3}+\dfrac{z_3}{z_1}\right)=-\dfrac{3}{2}$.

γ) Δίνεται η ευθεία (ε): $3x+4y-12=0$. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη απόσταση των εικόνων του μιγαδικού w από την ευθεία (ε).

(ΟΕΦΕ 2010)

Θέμα 33^{o}

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z=x+\psi i$ με $x,\psi\in R$.

Β1. Αν ισχύει ότι $2z-i\bar{z}=3$, τότε να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό z.

Β2. Αν $z=2+i$, τότε να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w για τους οποίους ισχύει ότι: $|w+z|=|z^2|$.

Β3. Αν $z=2+i$ και $u=\dfrac{\bar{z}+iz}{\bar{z}-1}$, τότε να αποδείξετε ότι $u^{2010}=-1$.

(Εσπερινά 2010)

Θέμα 34^{o}

Θεωρούμε την εξίσωση $z^2-6z+\gamma=0$ με $\gamma\in IR$, η οποία έχει ρίζες τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 με $\operatorname{Im}(z_1)>0$ και $|z_1|=5$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\gamma=25$.

Γ2. Αν $\gamma=25$, να βρείτε τις ρίζες της παραπάνω εξίσωσης.

Γ3. Αν για τον μιγαδικό αριθμό w ισχύει $|w-z_1|=|w-z_2|$, να αποδείξετε ότι $w\in IR$.

Γ4. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $(z_1-2-3i)^8+(z_2-4+5i)^8$.

(Επαναληπτικές εσπερινών 2010)

Θέμα 35^{o}

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z για τους οποίους ισχύει **$|z|=|z-2i|$**

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο είναι η ευθεία με εξίσωση ψ = 1

B2. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, να βρείτε εκείνους που έχουν μέτρο ίσο με $\sqrt{2}$

B3. Έστω $z_1 = 1 + i$ και $z_2 = -1 + i$ οι μιγαδικοί αριθμοί που βρήκατε στο ερώτημα B2.

Να αποδείξετε ότι $z_1^4 + z_2^4 = -8$

(Ομογενείς 2010)

Θέμα 36ο

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z και w με z≠3i, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z-3i|+|\bar{z}+3i|=2 \text{ και } w=z-3i+\frac{1}{z-3i}.$$

1. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z
2. Να αποδείξετε ότι $\bar{z}+3i=\dfrac{1}{z-3i}$
3. Να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αριθμός και ότι $-2 \le w \le 2$
4. Να αποδείξετε ότι: $|z-w|=|z|$

(Μάιος 2011)

Θέμα 37ο

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, w, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z-i|=1+\mathrm{Im}(z) \ (1) \text{ και } w\left(\bar{w}+3i\right)=i\left(3\bar{w}+i\right) \ (2)$$

1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η παραβολή με εξίσωση $y=\dfrac{1}{4}x^2$
2. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο Κ(0, 3) και ακτίνα $\rho = 2\sqrt{2}$.
3. Να βρείτε τα σημεία Α και Β του μιγαδικού επιπέδου, τα οποία είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, w με z =w.
4. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές και, στη συνέχεια, να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό u με εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο το σημείο Λ, έτσι ώστε το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία Κ, Α, Λ, Β να είναι τετράγωνο.

(Επαναληπτικές 2011)

Θέμα 38ο

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z και w με z≠3i, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z-3i|+|\bar{z}+3i|=2 \quad \text{και} \quad w=z-3i+\frac{1}{z-3i}.$$

A1 .Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z

A2. Να αποδείξετε ότι $\bar{z}+3i=\dfrac{1}{z-3i}$

A3. Να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αριθμός και ότι $-2 \le w \le 2$

A4. Να αποδείξετε ότι: $|z-w|=|z|$

(Εσπερινά 2011)

Θέμα 39ο

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, w, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z-i|=1+Im(z) \quad (1) \text{ και } \quad w\left(\overline{w}+3i\right)=i\left(3\overline{w}+i\right) \quad (2)$$

1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η παραβολή με εξίσωση $y=\frac{1}{4}x^2$
2. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο K(0, 3) και ακτίνα ρ=2$\sqrt{2}$.
3. Να βρείτε τα σημεία Α και Β του μιγαδικού επιπέδου, τα οποία είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, w με z =w.
4. Αν Λ είναι η εικόνα του μιγαδικού αριθμού u=-i στο μιγαδικό επίπεδο, τότε να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία Κ, Α, Λ, Β είναι τετράγωνο.

(Επαναληπτικές εσπερινών 2011)

Θέμα 40ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$|z-1|^2+|z+1|^2=4 \quad (1) \text{ και } \quad |w-5\overline{w}|=12 \qquad (2)$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ = 1,.

Μονάδες 6

Β2. Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1-z_2|=\sqrt{2}$, τότε να βρείτε το $|z_1+z_2|$.

Μονάδες 7

Β3. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο επίπεδο είναι η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ και στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του |w|.

Μονάδες 6

Β4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς z,w που επαληθεύουν τις σχέσεις (1) και (2) να αποδείξετε ότι:

$$1\le|z-w|\le4$$

Μονάδες 6

(Μάιος 2012)

Θέμα 41ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, με $z\neq-1$ για τους οποίους ο αριθμός $w=\frac{z-1}{z+1}$ είναι φανταστικός. Να αποδείξετε ότι:

Β1. |z|=1

Μονάδες 7

B2 . Ο αριθμός $\left(z-\frac{1}{z}\right)^4$ είναι πραγματικός.

Μονάδες 6

B3 . $\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right)(z_1+z_2)\leq 4$ όπου z_1, z_2 δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z

Μονάδες 6

B4. Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών u, για τους οποίους ισχύει $u-ui=\frac{i}{w}-w$, $w\neq 0$ ανήκουν στην υπερβολή $x^2-y^2=1$

Μονάδες **6**

(Επαναληπτικές 2012)

Θέμα 42ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$|z-3|^2+|z+3|^2=36$ (1) και $|2w-1|=|w-2|$ (2)

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ = 3.

Μονάδες 8

B2 .Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1-z_2|=3\sqrt{2}$, τότε να βρείτε το $|z_1+z_2|$.

Μονάδες 9

B3. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ = 1.

Μονάδες 8

(Εσπερινά 2012)

Θέμα 43ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει: $(z-2)(\overline{z}-2)+|z-2|=2$

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z , είναι κύκλος με κέντρο K(2,0) και ακτίνα $\rho=1$. (μονάδες 5)

Στη συνέχεια, για κάθε μιγαδικό z που ανήκει στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο, να αποδείξετε ότι $|z|\leq 3$. (μονάδες 3)

Μονάδες 8

B2. Έστω ότι οι μιγαδικοί αριθμοί z_1 , z_2 που ανήκουν στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο είναι ρίζες της εξίσωσης $w^2+\beta w+\gamma=0$, με w μιγαδικό αριθμό και $\beta,\gamma\in R$.Αν

$$|\mathrm{Im}(z_1)-\mathrm{Im}(z_2)|=2$$

να αποδείξετε ότι: $\beta=-4$ και $\gamma=5$ Μονάδες 9

B3. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς α_o, α_1, α_2 οι οποίοι ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος **B1**. Αν ο μιγαδικός αριθμός ν ικανοποιεί τη σχέση:

$v^3+\alpha_2 v^2+\alpha_1 v+\alpha_0=0$, να αποδείξετε ότι: $|v|<4$ Μονάδες 8

(Μάιος 2013)

Θέμα 44ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν η εξίσωση

$$2x^2-|w-4-3i|x=-2|z|\ ,\ x\in R$$

έχει μια διπλή ρίζα, την x = 1

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho_1= 1$, καθώς επίσης ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο K(4,3) και ακτίνα $\rho_2= 4$.

Μονάδες 8

B2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός, η εικόνα του οποίου ανήκει και στους δύο παραπάνω γεωμετρικούς τόπους.

Μονάδες 5

B3. Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, w του ερωτήματος B1 να αποδείξετε ότι

$$|z-w|\le 10 \quad \text{και} \quad |z+w|\le 10:$$

Μονάδες 6

B4. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z του ερωτήματος B1 να βρείτε εκείνους, για τους οποίους ισχύει

$$|2z^2-3z-2z\bar{z}|=5\ :$$

Μονάδες 6

(Ιούνιος 2013)

Θέμα 45ο

Δίνεται η εξίσωση

$$2|z|^2+(z+\bar{z})i-4-2i=\ 0\ \ ,\ z\in\mathbb{C}$$

B1. Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

Μονάδες 9

B2. Αν z_1=1+i και z_2 =1- i είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$w=3\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{39}$$

είναι ίσος με - 3i

Μονάδες 8

B3. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών u για τους οποίους ισχύει

$$|u+w|=|4z_1-z_2-i|$$

όπου w, z_1 , z_2 οι μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος B2.

Μονάδες 8

(Μάιος 2014)

Θέμα 46ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν:

- $w = \dfrac{2z-i}{2z+i}$, $z \neq -\dfrac{i}{2}$
- w φανταστικός

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z, είναι ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho=\dfrac{1}{2}$, εκτός από το σημείο $M(0,-\dfrac{1}{2})$, του κύκλου

Μονάδες 10

B2. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, του ερωτήματος B1, να βρείτε εκείνους για τους οποίους ισχύει $|w|= 1$.

Μονάδες 8

B3. Αν είναι $z =\dfrac{1}{2}$, τότε να αποδείξετε ότι

$$w^4 + i\, w^7 = 0$$

Μονάδες 7

(Ιούνιος 2014)

Θέμα 47ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$|z+4|=2|z+1|$$

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 2$

Μονάδες 9

B2. Αν z_1 ο πραγματικός αριθμός με $Re(z_1) > 0$ και z_2 ο φανταστικός αριθμός με $Im(z_2) < 0$ είναι δύο από τους μιγαδικούς αριθμούς του ερωτήματος **B1**, τότε να αποδείξετε ότι:

$z_1 = 2$ και $z_2 = -2i$

Μονάδες 8

B3. Αν z_1, z_2 είναι οι μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος **B2**, τότε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης : $A= (z_1 - z_2)^{20} - (z_1 + z_2)^{20}$

Μονάδες 8

(Ομογενείς 2014)

(Το αρχείο αυτό είναι η τρίτη έκδοση. Παρακαλώ να διαγράψετε τα παλαιότερα αρχεία !)