Άσκηση 1

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + \lambda x + 1 = 0$. Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ, το πλήθος των ριζών της.

Λύση

Θα βρούμε για τις διάφορες τιμές του λ το πρόσημο ή τις ρίζες της διακρίνουσας. Είναι

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = \lambda^2 - 4\cdot$$

- Αν $\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4 > 0$

  $\Leftrightarrow \lambda^2 > 4$

  $\Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2} > \sqrt{4}$

  $\Leftrightarrow |\lambda| > 2$

  $\Leftrightarrow \lambda > 2$ ή $\lambda < -2$,

  η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες.

Αν $\theta \geq 0$, τότε $|x| > \theta \Leftrightarrow x > \theta$ ή $x < -\theta$

- Αν $\Delta = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4 = 0$

  $\Leftrightarrow \lambda^2 = 4$

  $\Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{4}$

  $\Leftrightarrow \lambda = 2$ ή $\lambda = -2$,

  η εξίσωση έχει δύο ρίζες ίσες.

$x^2 = \alpha \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\alpha}$, $\alpha \geq 0$

- Αν $\Delta < 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4 < 0$

  $\Leftrightarrow \lambda^2 < 4$

  $\Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2} < \sqrt{4}$

  $\Leftrightarrow |\lambda| < 2$

  $\Leftrightarrow -2 < \lambda < 2$,

  η εξίσωση δεν έχει ρίζες.

Αν $\theta \geq 0$ τότε $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$

Άσκηση 2

Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η συνάρτηση

$$\mathbf{f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 5x + \lambda}}$$

έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Άσκηση 3

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2 - 3\lambda + 2)\, x^2 + (\lambda - 2)\, x + 3 = 0$. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός λ ώστε:

α) να έχει μία μόνο ρίζα

β) να έχει διπλή ρίζα

γ) να είναι αδύνατη.

Άσκηση 4

Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση $x^2 - \lambda x - \lambda^2 - 5 = 0$ έχει δύο ρίζες x_1, x_2 και ισχύει η σχέση: $(x_1 - 2)(x_2 - 2) = -4$

Άσκηση 5

Δίνεται η εξίσωση $\alpha(x-1) - \beta(x-3) = 2x$

α) Να βρείτε τις τιμές των α, β για τις οποίες έχει λύση $x = 3$.

β) Να βρείτε την τιμή του α για την οποία έχει λύση $x = 2$ όταν $\beta = 1$.

γ) Να βρείτε τις τιμές των α, β για τις οποίες έχει δύο λύσεις.