Για το πρόβλημα του εξισωτή τριγώνου
Με αφορμή μία εργασία που δημοσιεύτηκε στο περιοδικό «Ευκλείδης Γ΄»

Ανδρέας Πούλος

Οι συνάδελφοι μαθηματικοί Δημήτρης Ντρίζος και Γιώργος Ρίζος δημοσίευσαν πρόσφατα στο περιοδικό «*Ευκλείδης Γ΄*», τεύχος 81, Β΄ εξάμηνο 2014, μία εργασία τους έκτασης 20 σελίδων με τίτλο «*Το πρόβλημα του εξισωτή τριγώνου: πλήρης μελέτη για κάθε είδος τριγώνου*». Επειδή θεωρώ το θέμα πολύ ενδιαφέρον, όχι μόνον από προσωπική άποψη, αλλά και από συζητήσεις με άλλους συναδέλφους, αισθάνομαι την υποχρέωση να ενημερωθεί ένα ευρύτερο κοινό μαθηματικών, οι οποίοι δεν διαβάζουν τον «Ευκλείδη Γ΄», αλλά θα έβρισκαν χρήσιμο για τη δουλειά τους την αντιμετώπιση αυτού του θέματος. Θα παρουσιάσουμε αυτή την εργασία, τον τρόπο με τον οποίο οι δύο συγγραφείς εργάστηκαν και τις τεχνικές που ανέπτυξαν για να αντιμετωπίσουν το συγκεκριμένο πρόβλημα. Επίσης, θα αναφερθούμε για την αξία της στη μαθηματική μας βιβλιογραφία.

Κατ' αρχάς, είναι αναγκαίο να σημειώσουμε ότι ως **εξισωτή**, οι συγγραφείς ορίζουν μία ευθεία γραμμή, η οποία χωρίζει ένα επίπεδο χωρίο (στην προκειμένη περίπτωση ένα τριγωνικό χωρίο) σε δύο σχήματα ισοδύναμα και ισοπεριμετρικά. Οι συγγραφείς στην περίληψη της δημοσίευσής τους, ουσιαστικά στο εισαγωγικό σημείωμα για το πρόβλημα, τονίζουν ότι έχουν λάβει υπόψη τους τη βιβλιογραφία στην ελληνική και στην αγγλική γλώσσα, που αναφέρεται στο πρόβλημα της εύρεσης του εξισωτή τριγώνου. Θεωρούν ως πλεονέκτημα τον τρόπο προσέγγισης του προβλήματος, με εξαιρετικά λίγες απαιτήσεις σε μαθηματικές γνώσεις, επιπέδου Λυκείου. Αυτός ήταν και ένας από τους λόγους που επιχείρησαν να την δημοσιοποιήσουν σε μαθηματικό περιοδικό.

Το ότι το πρόβλημα είναι αρκετά δύσκολο και απαιτητικό προκύπτει από το δεδομένο ότι το χρησιμοποιούσαν ως κριτήριο επιλογής για τα σχολεία ταλαντούχων στα Μαθηματικά της πρώην Σ.Ε., βλέπε το άρθρο του A. Shen, (*Shen, 1994*).

Οι συγγραφείς εργάστηκαν με τη μελέτη των ειδικών περιπτώσεων, ειδικών τριγώνων, ώστε να καταλήξουν στο γενικό συμπέρασμα, δηλαδή στην επίλυση του προβλήματος για κάθε είδος τριγώνου. Διέκριναν δύο βασικές περιπτώσεις:

α) **ο εξισωτής να διέρχεται από μία κορυφή** του δεδομένου τριγώνου – στην περίπτωση αυτή αποδεικνύουν ότι το πρόβλημα έχει λύση, μόνο αν ο εξισωτής διέρχεται από την κορυφή ισοσκελούς τριγώνου – και

β) **ο εξισωτής τέμνει τις πλευρές του τριγώνου**. Στην περίπτωση αυτή, το πρώτο τους βήμα ήταν να περιγράψουν τις αλγεβρικές σχέσεις που συνδέουν τα μήκη των πλευρών του τριγώνου και τις αποστάσεις των σημείων από τα οποία διέρχεται ο εξισωτής σε σχέση με τις κορυφές του τριγώνου. Ειδικά για το ισόπλευρο τρίγωνο, απέδειξαν ότι δεν υπάρχει εξισωτής που να τέμνει τις πλευρές του σε εσωτερικά σημεία.

Σημειώνουμε ότι κατά τη μελέτη του προβλήματος για ισόπλευρο και για ισοσκελές τρίγωνο, το μαθηματικό εργαλείο που χρησιμοποίησαν είναι στοιχειώδης Άλγεβρα, οι ιδιότητες της διακρίνουσας μιας δευτεροβάθμιας πολυωνυμικής εξίσωσης και στοιχειώδεις ανισότητες.

Στην περίπτωση του ισοσκελούς τριγώνου απέδειξαν ότι υπάρχουν δύο εξισωτές, που τέμνουν τις πλευρές του, οι οποίοι μάλιστα είναι συμμετρικοί ως προς τον άξονα συμμετρίας του σχήματος. Μάλιστα, το ενδιαφέρον για την περίπτωση του ισοσκελούς τριγώνου είναι και η ανακάλυψη μιας αναγκαίας συνθήκης για να υπάρχει εξισωτής.

Κατέληξαν ότι η συνθήκη ύπαρξης εξισωτή για ισοσκελή τρίγωνα με πλευρές β = γ είναι η $2(\sqrt{2}-1)\beta \le \alpha \le \beta$,(1). Αυτή η συνθήκη με μία ισοδύναμη μορφή είχε παρουσιαστεί από τον Δ. Κοντοκώστα, *(Kodokostas,* 2010). Αυτός ανακάλυψε την ακριβή σημασία της συνθήκης για τη γωνία $2\tau o\xi\eta\mu(\sqrt{2}-1)$ σε σχέση με το πλήθος των λύσεων του προβλήματος. Η γωνία απέναντι από την βάση του ισοσκελούς τριγώνου πρέπει να έχει άνοιγμα από 48^{o} 56’ 23΄΄ έως 60^{o}. Δηλαδή, δεν υπάρχει εξισωτής για όλα τα ισοσκελή τρίγωνα, π.χ. για τα αμβλυγώνια ισοσκελή τρίγωνα.

Τέλος, ένα επίσης ενδιαφέρον εύρημα για τη διερεύνηση του προβλήματος είναι ότι δεν υπάρχει εξισωτής, ο οποίος να τέμνει εσωτερικά τη βάση του και μία από τις δύο ίσες πλευρές του.

Η μελέτη της ύπαρξης εξισωτή για σκαληνό τρίγωνο είναι η δυσκολότερη και η πλέον ενδιαφέρουσα. Για να διευκολύνουμε την κατανόηση των αποτελεσμάτων της μελέτης, ας θεωρήσουμε ότι για τις πλευρές α, β, γ του ισοσκελούς τριγώνου ισχύει η διάταξη β > γ > α. Οι συγγραφείς αποδεικνύουν ότι:

1. Δεν υπάρχει εξισωτής που να τέμνει εσωτερικά τις δύο μικρότερες πλευρές του.
2. Υπάρχει πάντα, δηλαδή ανεξάρτητα από το μήκος των πλευρών, ένας εξισωτής, ο οποίος τέμνει εσωτερικά τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη πλευρά, την β και την α, αντίστοιχα.
3. Υπάρχουν δύο εξισωτές, οι οποίοι τέμνουν τη μεγαλύτερη και τη μεσαία (σε μήκος) πλευρά, αρκεί να ισχύει μία συνθήκη την οποία αποδεικνύουν.

Η συνθήκη είναι η $(\alpha + \beta + \gamma)^2 \ge 8\beta\gamma$, (2).

Στην περίπτωση που είναι $\Delta_1 = (\alpha+\beta+\gamma)^2 - 8\beta\cdot\gamma = 0$, οι συγγραφείς αναφέρουν τη συνθήκη που περιγράφει ο Δημήτρης Κοντοκώστας σε σχετική με τον εξισωτή εργασία του στο περιοδικό *Mathematical Magazine, (Kodokostas,* 2010), ότι ο εξισωτής δηλαδή, διέρχεται από το έγκεντρο του τριγώνου και είναι κάθετος στη εσωτερική διχοτόμο την μεταξύ των πλευρών β και γ.

Τελικά, οι δύο συγγραφείς κατέληξαν στα ακόλουθα συμπεράσματα.

1.Σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο οι άξονες συμμετρίας του είναι εξισωτές του.

2. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο,
α) ο άξονας συμμετρίας του είναι εξισωτής του,
β) υπάρχουν δύο εξισωτές, συμμετρικοί ως προς τον άξονα συμμετρίας του, που τέμνουν τις ίσες πλευρές β, γ, αν και μόνο αν ισχύει η συνθήκη (1).
γ) Δεν υπάρχει εξισωτής που να τέμνει σε εσωτερικά τους σημεία τις πλευρές α, β, όπου α είναι η βάση του ισοσκελούς τριγώνου.

3. Σε κάθε σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ με β > γ > α,
α) δεν υπάρχει εξισωτής που να τέμνει σε εσωτερικά τους σημεία τις πλευρές α, γ.
β) υπάρχει πάντα ένας εξισωτής που τέμνει σε εσωτερικά τους σημεία τις πλευρές α, β.
γ) υπάρχουν δύο εξισωτές που τέμνουν τις πλευρές β, γ σε εσωτερικά τους σημεία, αν και μόνο αν ισχύει $(\alpha + \beta + \gamma)^2 \ge 8\beta\gamma$.

Εφόσον τα μήκη των τμημάτων κ, λ είναι ρίζες δευτεροβάθμιας εξίσωσης με πραγματικούς συντελεστές, τα τμήματα αυτά είναι κατασκευάσιμα σε κάθε περίπτωση, οπότε και οι εξισωτές οποιουδήποτε τριγώνου μπορούν να κατασκευαστούν. Σε κάθε περίπτωση, οι συγγραφείς σημειώνουν ότι οι εξισωτές εφόσον υπάρχουν, είναι κατασκευάσιμοι με κανόνα και διαβήτη.

Μετά την συνοπτική περιγραφή της λύσης του προβλήματος που μας έδωσαν οι δύο συγγραφείς, θα επιχειρήσουμε μία αποτίμηση της εργασίας τους σε σχέση με τις παλαιότερες λύσεις που προτάθηκαν για αυτό.

Ο George Berzsenyi (*Berzsenyi,1997*) στο συνοπτικό του άρθρο για τον εξισωτή τριγώνου είχε θέσει το ερώτημα-εικασία, αν υπάρχει τρίγωνο με περισσότερους από 3 εξισωτές. Συγκεκριμένα αναφέρει, «*έχω την πεποίθηση ότι το άνω φράγμα του πλήθους των εξισωτών τριγώνου είναι τρία*». Σε αυτό απάντησαν εμμέσως οι συγγραφείς με τα συμπεράσματά τους. Δεν υπάρχει τέτοιο τρίγωνο. Ο Berzsenyi στο ίδιο άρθρο ανέφερε την εικασία, την οποία είχε διατυπώσει ο καθηγητής H. Bailey ότι δεν υπάρχει τρίγωνο με ακριβώς δύο εξισωτές. Ο Δημήτρης Κοντοκώστας γνώριζε την εικασία και απάντησε σαφώς στην εργασία του (*Kodokostas,* 2010) ότι αυτή είναι λανθασμένη, δηλαδή απέδειξε ότι υπάρχουν τρίγωνα με ακριβώς δύο εξισωτές. Οι συγγραφείς, στο εύρημα 3γ απαντούν εμμέσως.

Θεωρούμε χρήσιμο να αναφέρουμε, ότι στο ίδιο άρθρο ο G. Berzsenyi διατυπώνει την πρόκληση ότι είναι καλό να μελετηθεί το τρισδιάστατο ανάλογο του προβλήματος, δηλαδή η τομή τετραέδρου από επίπεδο, το οποίο να το χωρίζει σε δύο στερεά ίσου όγκου και ίσου επιφανειακού εμβαδού. Αυτό δεν σημαίνει ότι η εργασία των δύο συγγραφέων μειονεκτεί, επειδή δεν απαντά και στο πρόβλημα αυτό, εξάλλου κάθε εργασία έχει ένα συγκεκριμένο στόχο, δεν μπορεί να απαντά σε όλα τα ανοικτά ερωτήματα. Όπως παρατήρησα στην βιβλιογραφία για τον εξισωτή τριγώνου και οι υπόλοιποι ερευνητές δεν απάντησαν στην πρόκληση του Berzsenyi. Απλά την αναφέρω, επειδή συνδέεται άμεσα με το θέμα που εξετάζουμε.

Αναφέραμε και προηγούμενα ότι οι συγγραφείς εργάστηκαν κυρίως με αλγεβρικά μέσα, δεν ενδιαφέρθηκαν για μία απόδειξη του θεωρήματος ότι «*ο εξισωτής ενός τριγώνου διέρχεται αναγκαστικά από το έγκεντρο του*», ίσως επειδή διαπίστωσαν ότι είχαν προηγηθεί άλλοι *(Kodokostas 2010, Kung 2002, De et al, 2014*). Υποθέτουμε ότι για τον ίδιο λόγο, οι συγγραφείς δεν ασχολήθηκαν και με την πρόταση «*μία ευθεία που διέρχεται από το έγκεντρο ενός τριγώνου και το χωρίζει σε δύο ισεμβαδικά σχήματα, τότε το χωρίζει και σε δύο ισοπεριμετρικά σχήματα*» ή με τη γενικότερη πρόταση «*μία ευθεία που διέρχεται από το έγκεντρο ενός τριγώνου και το χωρίζει σε δύο σχήματα, τότε ο λόγος των εμβαδών των σχημάτων αυτών είναι ίσος με το λόγο των περιμέτρων τους».*

Η πρωτοτυπία της προσπάθειας των δύο συγγραφέων βρίσκεται κυρίως στα απλά αλγεβρικά εργαλεία που χρησιμοποίησαν για να προσεγγίσουν το πρόβλημα. Αντίστοιχα, ο Κοντοκώστας, (*Kodokostas 2010)* στην πρώτη φάση της έρευνάς του χρησιμοποίησε καθαρά γεωμετρικές τεχνικές και στη δεύτερη φάση Τριγωνομετρία και παραγώγους για να υπολογίσει τα ακρότατα σε ένα διάστημα μιας συνάρτησης, η οποία ήταν γνησίως φθίνουσα. Ας σημειωθεί ότι ο ίδιος έθεσε το ερώτημα αν η συνθήκη $2\textit{τοξημ}(\sqrt{2}-1)$ παίζει ρόλο και σε άλλα προβλήματα των Μαθηματικών, κάτι το οποίο ο ίδιος δεν γνώριζε. Βεβαίως, η εργασία του Δημήτρη Κοντοκώστα είναι υποδειγματική ως προς τον τρόπο που χειρίζεται το θέμα του, ως προς τα συμπεράσματα που εξάγει και ως προς τις τεχνικές που χρησιμοποιεί. Για τον λόγο αυτό άλλωστε είναι και σημείο αναφοράς στο σχετικό πρόβλημα.

Σημειώνουμε ότι και ο Ross Honsberger, (*Honsberger, 2004*), βιβλία του οποίου έχει εκδώσει η Μαθηματική Εταιρεία των Η.Π.Α. για να επιλύσει αυτό το πρόβλημα έκανε χρήση Διαφορικού Λογισμού.

Το 2012 δημοσιεύθηκε πάλι στο περιοδικό «Ευκλείδης Γ΄» ένα άρθρο με τίτλο «*εξισωτής ορθογωνίου τριγώνου*» (*Σφήκας, 2012*). Σε αυτό, όπως υποδηλώνει ο τίτλος

του μελετάται το πρόβλημα ειδικά για ορθογώνια τρίγωνα σε ένα αδικαιολόγητα μεγάλης έκτασης κείμενο (26 σελίδες) με τη χρήση συστημάτων πολυωνυμικών εξισώσεων. Όμως αυτή η εργασία εκτός από το ότι εξετάζει μόνο την ειδική περίπτωση του ορθογωνίου τριγώνου, έχει και μία δεύτερη αδυναμία, τις πολύπλοκες αλγεβρικές πράξεις και υπολογισμούς.
Για να αντιληφθεί ο αναγνώστης την πολυπλοκότητα των πράξεων στο συγκεκριμένο άρθρο, παραθέτουμε ένα μόνο απόσπασμα από μία από τις ειδικές υποπεριπτώσεις που εξετάζονται:

Για το διάστημα όπου: $r \in (0, 1)$, τα συμπεράσματα συνοψίζονται ως εξής:

- **i.** για το διάστημα: $r \in (0, r_2)$, με $r_2 \cong 0.39661$, ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει έναν εξισωτή.
- **ii.** για το διάστημα: $r \in (r_2, \rho_1]$, με $r_2 \cong 0.39661$ και $\rho_1 = (\sqrt{2}-1) \cong 0.41421$, ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει τρεις εξισωτές.
- **iii.** για το διάστημα: $r \in (\rho_1, r_3)$, με $\rho_1 = (\sqrt{2}-1) \cong 0.41421$ και $r_3 \cong 0.43204$, ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει τρεις εξισωτές.
- **iv.** για το διάστημα: $r \in (r_3, 1)$, με $r_3 \cong 0.43204$, ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει έναν εξισωτή.
- **v.** για τις τιμές: $r_2 \cong 0.39661$ και $r_3 \cong 0.43204$, ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει δύο εξισωτές.

Αυτά τα αναφέρουμε όχι για να υποτιμήσουμε την προαναφερθείσα εργασία, αλλά για να τονίσουμε τα πλεονεκτήματα της εργασίας των συναδέλφων Δ. Ντρίζου και Γ. Ρίζου.

Το δεδομένο ότι οι συγγραφείς χρησιμοποίησαν απλά αλγεβρικά μέσα για να προσεγγίσουν το πρόβλημα, εκτός του ότι αποτελεί πλεονέκτημα, δεν σημαίνει ότι δεν απαιτήθηκε κόπος και προσπάθεια για αυτό. Οι αλγεβρικοί υπολογισμοί είναι λεπτομερείς και κοπιαστικοί και δεν είναι τυχαίο ότι η εργασία τους έχει έκταση 20 σελίδων. Όμως, καλύπτει όλες τις περιπτώσεις τριγώνων, ξεκινώντας από τις «εύκολα» διαχειρίσιμες και καταλήγοντας στις «δύσκολες».

Οι συγγραφείς χειρίζονται το θέμα τους με έναν τρόπο που είναι κατανοητός και από μαθητές Λυκείου. Θεωρούμε ότι η μακρά θητεία τους στην εκπαίδευση έπαιξε ρόλο σε αυτή την προσπάθεια, να γίνει δηλαδή κατανοητό το συγκεκριμένο πρόβλημα και η αντιμετώπισή του από όσο το δυνατόν ευρύτερο κοινό ενδιαφερομένων.

Επίσης, καλό είναι να τονίσουμε ότι οι δύο συγγραφείς μεριμνούν και για την ευκλείδεια κατασκευή των εξισωτών τριγώνου, κάτι που δεν συναντάμε σε άλλες σχετικές εργασίες. Προαναφέραμε, ότι επειδή τα μήκη των τμημάτων στα οποία ο εξισωτής τέμνει τις πλευρές του τριγώνου αποτελούν ρίζες δευτεροβάθμιας εξίσωσης με πραγματικούς συντελεστές, τα τμήματα αυτά είναι κατασκευάσιμα σε κάθε περίπτωση, συνεπώς οι εξισωτές μπορούν να κατασκευαστούν με κανόνα και διαβήτη.

Εν τέλει θεωρούμε ότι έχει ενδιαφέρον να μελετήσουμε τον τρόπο με τον οποίο οι δύο συγγραφείς αντιμετώπισαν αυτό το απαιτητικό και ακανθώδες πρόβλημα μέσω της σχολικής Άλγεβρας και ότι αυτή τους η προσπάθεια αποτελεί παράδειγμα για αντίστοιχα προβλήματα. Προσωπικά, η εργασία αυτή θα μου χρησιμεύσει σε σεμινάρια επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, τα οποία θα πραγματοποιηθούν στα Π.Ε.Κ. Θεσσαλονίκης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Berzsenyi George, (1997). Εξισωτής τριγώνου. Μία έξυπνη ευθεία που έχει δύο ρόλους. *Περιοδικό Quantum*. Εκδόσεις Κάτοπτρο, τόμος 4, τεύχος 3, σελ. 47.

Honsberger Ross, (2004). *Mathematical Delighs*. M.A.A. p. 71-74.

Kodokostas Dimitrios, (2010). Triangle Equalizers. *Mathematics Magazine*, **83**: 2, 141-146.

Kung H. Sidney, (2002). A Line through the Incenter of a Triangle. *Mathematics Magazine*, **75**, 3, 214.

Ντρίζος Δημήτρης & Γιώργος Ρίζος, (2014). Το πρόβλημα του εξισωτή τριγώνου: πλήρης μελέτη για κάθε είδος τριγώνου. *Περιοδικό Ευκλείδης Γ*, τεύχος 81, σελίδες 1-20.

Σφήκας Ιωάννης, *(2012).* Εξισωτής Ορθογωνίου Τριγώνου. *Περιοδικό Ευκλείδης Γ'*. Τεύχος 76, σελ. 110–135.

Shen, A., (1994). Entrance Examinations to the Mekh-mat, *The Mathematical Intelligencer*, Vol. 16, No.4, 6–10.

Todd Anthony, (1999). Bisecting a Triangle. *Pi Mu Epsilon*, **11**: 1, 31-37.

Todd Anthony, (2011). Letter to the Editor, *Mathematics Magazine*, **84**: 5, 396.

Διευθύνσεις από το Διαδίκτυο που αναφέρονται στο θέμα:

http://www.pme-math.org/journal/issues/PMEJ.Vol.11.No.1.pdf

http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/GeoGebra/HalvedArea.shtml

http://www.mathteacherctk.com/blog/2013/05/area-and-perimeter-splitters-in-a-triangle/