ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Α' ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ

«Ευκλείδης»

Ημερομηνία: 24/01/2015 **Ώρα εξέτασης: 10:00-14:30**

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε **όλα** τα θέματα **αιτιολογώντας** πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού (Tipp-ex).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε τον μικρότερο δυνατό ακέραιο θετικό αριθμό N με την εξής ιδιότητα:
Κάθε ένας αριθμός του συνόλου $A = \{1,2,3, \dots ,10\}$ να μπορεί να εκφραστεί ως ένα ψηφίο ή ως άθροισμα διαδοχικών ψηφίων του N.

Προτεινόμενη λύση

Προφανώς δεν μπορούμε να έχουμε τριψήφιο αριθμό που να ικανοποιεί την απαίτηση του προβλήματος.

Υποθέτουμε ότι ο αριθμός που ψάχνουμε είναι τετραψήφιος έστω $\overline{\alpha\beta\gamma\delta}$. Τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε 10 διαφορετικά αθροίσματα διαδοχικών ψηφίων τα εξής:

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\delta, \alpha+\beta+\gamma, \beta+\gamma+\delta, \alpha+\beta+\gamma+\delta$$

Για να ικανοποιούν τις συνθήκες του προβλήματος αυτά τα 10 αθροίσματα θα πρέπει να είναι διαφορετικά. Επομένως πρέπει όλα τα ψηφία του αριθμού να είναι διαφορετικά και να έχουν άθροισμα 10. Η μόνη περίπτωση είναι να έχουμε τα ψηφία 1,2,3,4.Αλλά, με αυτή την διάταξη για να πάρουμε το 9 ως άθροισμα θα πρέπει το 1 να είναι ή στην πρώτη θέση ή στην τελευταία θέση. Με τον ίδιο τρόπο για να πάρουμε το 8 ως άθροισμα θα πρέπει το 2 να είναι στην πρώτη ή την τελευταία θέση. Επομένως έχουμε τις εξής περιπτώσεις

$$1342, 1432, 2341, 2431$$

Όμως αν έχουμε τον πρώτο ή τον τέταρτο αριθμό δεν μπορούμε να σχηματίσουμε το 5 ως άθροισμα διαδοχικών ακεραίων ενώ αν έχουμε τον δεύτερο ή τον τρίτο αριθμό δεν μπορούμε να σχηματίσουμε το 6 ως άθροισμα διαδοχικών ακεραίων.

Άρα ο αριθμός που ψάχνουμε έχει τουλάχιστον 5 ψηφία. Ο αριθμός μας δεν μπορεί να ξεκινά με 1111, γιατί σε αυτή την περίπτωση για να πάρουμε ως άθροισμα το 10 θα έχουμε τις εξής επιλογές

$$11116, 11117, 11118, 11119$$

Αλλά σε αυτή την περίπτωση δεν μπορεί να εκφραστεί το 5.
Αν ο αριθμός μας αρχίζει με 1112 τότε για να πάρουμε ως άθροισμα το 10 θα έχουμε τις εξής επιλογές

$$11125, 11126, 11127, 11128$$

Οι αριθμοί αυτοί όμως δεν ικανοποιούν τις συνθήκες του προβλήματος. Επομένως, ο ελάχιστος αριθμός μας αρχίζει με 1113 τουλάχιστον. Οι αριθμοί 11131, 11132, 11133 δεν μας δίνουν το 10 ως άθροισμα. Ο αμέσως επόμενος αριθμός είναι ο 11134 ο οποίος ικανοποιεί τις απαιτήσεις του προβλήματος.

Πρόβλημα 2

Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} 32y + 32x^3 = 6x + 17 \\ 16z + 32y^3 = 6y + 9 \\ 8x + 32z^3 = 6z + 5 \end{cases}$$

αν $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Προτεινόμενη λύση

Οι εξισώσεις του συστήματος γράφονται ως εξής:

$$32y + 32x^3 = 6x + 17 \Leftrightarrow y = -x^3 + \frac{6x}{32} + \frac{17}{32} \Leftrightarrow y - \frac{1}{2} = -x^3 + \frac{3x}{16} + \frac{17}{32} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$y - \frac{1}{2} = -x^3 + \frac{x}{4} - \frac{x}{16} + \frac{1}{32} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow y - \frac{1}{2} = x^2\left(\frac{1}{2} - x\right) + \frac{x}{2}\left(\frac{1}{2} - x\right) + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow y - \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2} - x\right)\left(x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{16}\right) \Leftrightarrow y - \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2} - x\right)\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 \qquad (1).$$

Η δεύτερη εξίσωση του συστήματος γράφεται

$$16z + 32y^3 = 6y + 9 \Leftrightarrow z - \frac{1}{2} = -2y^3 + \frac{3y}{8} + \frac{1}{16} \Leftrightarrow$$

$$z - \frac{1}{2} = -2y^3 + \frac{y}{2} - \frac{y}{8} + \frac{1}{16} + y^2 - y^2 \Leftrightarrow z - \frac{1}{2} = y^2(1 - 2y) + \frac{y}{2}(1 - 2y) + \frac{1}{16}(1 - 2y)$$

$$\Leftrightarrow z - \frac{1}{2} = 2\left(\frac{1}{2} - y\right)\left(y + \frac{1}{4}\right)^2 \qquad (2).$$

Όμοια η τρίτη εξίσωση του συστήματος γράφεται

$$x - \frac{1}{2} = -4z^3 + \frac{3z}{4} + \frac{5}{8} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow x - \frac{1}{2} = -4z^3 + z - \frac{z}{4} + \frac{1}{8} + 2z^2 - 2z^2 \Leftrightarrow$$

$$x - \frac{1}{2} = z^2(2 - 4z) + \frac{z}{2}(2 - 4z) + \frac{1}{16}(2 - 4z) \Leftrightarrow x - \frac{1}{2} = 4\left(\frac{1}{2} - z\right)\left(z + \frac{1}{4}\right)^2 \qquad (3).$$

Πολλαπλασιάζοντας τις $(1), (2)$ και (3) θα πάρουμε

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{2}\right) = 8\left(\frac{1}{2} - z\right)\left(z + \frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{2} - x\right)\left(x + \frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{2} - y\right)\left(y + \frac{1}{4}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{2}\right)\left[1 + 8\left(x + \frac{1}{4}\right)^2\left(y + \frac{1}{4}\right)^2\left(z + \frac{1}{4}\right)^2\right] = 0$$

Αν ένα τουλάχιστον από τα x, y, z είναι ίσο με $\frac{1}{2}$ τότε είναι $x = y = z = \frac{1}{2}$. Επομένως μοναδική λύση είναι $x = y = z = \frac{1}{2}$.

Πρόβλημα 3

Για ένα θετικό ακέραιο ν συμβολίζουμε με $\Pi(\nu)$ το γινόμενο των θετικών διαιρετών του ν.

i. Να βρείτε όλους τους θετικούς ακέραιους ν που ικανοποιούν την εξίσωση
$$\Pi(\nu) = 21\nu.$$
ii. Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι ν τέτοιοι ώστε $\Pi(\nu) = 21\nu^2$.

Προτεινόμενη λύση

(α) Έστω ότι $\nu = \rho_1^{\alpha_1}\rho_2^{\alpha_2} \dots \rho_\kappa^{\alpha_\kappa}$ η ανάλυση του ν σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Επειδή από την υπόθεση έχουμε $\Pi(\nu) = 21\nu = 3 \cdot 7 \cdot \nu$ είναι το γινόμενο των θετικών διαιρετών του ν σημαίνει ότι οι πρώτοι παράγοντες $3, 7$ θα είναι κάποια $\rho_i \;\; i = 1,2, \dots, \kappa$ της ανάλυσης του ν σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και επομένως θα είναι διαιρέτες του ν, δηλαδή $3 \;/\; \nu$ και $7 \;/\; \nu$.

Άρα ο ν είναι πολλαπλάσιο του 21, έστω $\nu = 21\mu, \;\; \mu \in \mathbb{N}$.
Αν υποθέσουμε ότι $\nu > 21$, τότε οι αριθμοί $3,7,21$ και ν θα είναι διαφορετικοί θετικοί διαιρέτες του ν και θα πάρουμε
$$\Pi(\nu) \geq 3 \cdot 7 \cdot 21 \cdot \nu = 21^2\nu$$
άτοπο αφού θέλουμε $\Pi(\nu) = 21\nu$.

Άρα $\nu = 21$ είναι η μόνη δυνατότητα. Πράγματι, $\Pi(21) = 1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 21 = 21 \cdot 21$ που ισχύει αυτό που θέλουμε.

(β) Υποθέτουμε ότι
$$\Pi(\nu) = 21\nu^2 \quad (1).$$

Όπως και στο (α) έχουμε ότι $\nu = 21\mu, \;\; \mu \in \mathbb{N}$.

Αν $\nu = 21$, τότε $\Pi(21) = 1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 21 = 21 \cdot 21 = 21^2$, δεν ισχύει η (1).
Αν $\nu = 42$, τότε $\Pi(21) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 14 \cdot 21 \cdot 42 = 42^4 \neq 42^2 \cdot 21$, άρα δεν ισχύει η (1).
Έστω $\nu > 42$ τότε $\nu \geq 63 \Rightarrow \frac{\nu}{7} \geq 9 > 7$. Επομένως
$$1 < 3 < 7 < \frac{\nu}{7} < \frac{\nu}{3} < \nu$$
είναι διαφορετικοί διαιρέτες του ν και άρα έχουμε
$$\Pi(\nu) \geq 1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \frac{\nu}{7} \cdot \frac{\nu}{3} \cdot \nu \geq \nu^3$$
Όμως
$$\nu > 21 \Rightarrow \nu^3 > 21\nu^2$$
Άρα
$$\Pi(\nu) \geq \nu^3 > 21\nu^2$$

Επομένως δεν υπάρχει ν τέτοιο ώστε $\Pi(\nu) = 21\nu^2$.

Πρόβλημα 4

Δίνονται δύο κύκλοι ω_1, ω_2, με τον ω_2 να είναι μεγαλύτερος του ω_1, οι οποίοι είναι εφαπτόμενοι εσωτερικά στο σημείο A. Έστω B σημείο του ω_2 και $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ οι εφαπτόμενες από το σημείο B προς τον κύκλο ω_1. Έστω ότι η (ε_1) εφάπτεται του ω_1 στο σημείο Γ και τέμνει τον κύκλο ω_2 ξανά στο σημείο Δ. Επίσης έστω ότι η (ε_2) εφάπτεται του ω_1 στο σημείο Z και τέμνει τον κύκλο ω_2 ξανά στο σημείο E. Ονομάζουμε M και N τα μέσα των τόξων $B\Delta$ και BE που δεν περιέχουν το σημείο A. Αν οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων $\Delta MB\Gamma$ και ΔBNZ τέμνονται στο σημείο H και T, P τα μέσα των MH, BN αντίστοιχα, να δείξετε ότι οι ευθείες MN, BH, TP διέρχονται από το ίδιο σημείο.

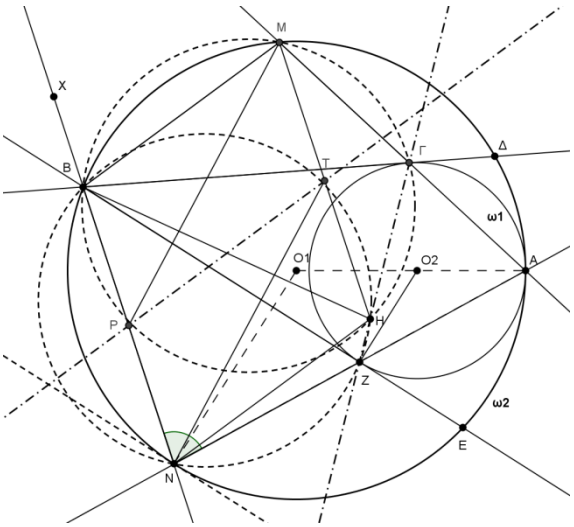
Προτεινόμενη λύση

Έστω ότι η ευθεία AE τέμνει τον κύκλο ω_2 στο σημείο N'. Τότε
$\angle EO_2A = 180^o - 2O_1AN' = \angle N'O_1A,$
άρα θα έχουμε

$$O_2E \parallel O_1N'$$

και αφού $O_2E \perp BZ$ στο σημείο E θα έχουμε ότι $O_1N' \perp BZ$, επομένως θα έχουμε ότι το μέσον N του τόξου BE θα ταυτίζεται με το N'. Άρα τα σημεία A, E, N είναι συνευθειακά, δηλαδή

$$\angle ZNB = \angle ANB$$



Όμοια τα σημεία A, Γ, M είναι συνευθειακά και έχουμε

$$\angle \Gamma MB = \angle AMB$$

Από τα εγγεγραμμένα τετράπλευρα $BHZN, BM\Gamma H$ και $AMBN$ θα πάρουμε

$$\angle BHZ + \angle \Gamma HB = 180^o - \angle BNZ + 180^o - \angle BM\Gamma = 360^o - (\angle BNZ + \angle BM\Gamma)$$
$$= 360^o - 180^o = 180^o$$

Επομένως $\angle BNH = \angle BZH$. Όμως από το θεώρημα χορδής εφαπτομένης παίρνουμε $\angle BZH = \angle \Gamma AZ$, και από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $AMBN$, $\angle \Gamma AZ = \angle XBM$. Άρα αφού

$$\angle BNH = \angle XBM$$

έπεται ότι $NH \parallel BM$. Όμοια αποδεικνύουμε ότι $MH \parallel BN$, δηλαδή το τετράπλευρο $BMHN$ είναι παραλληλόγραμμο.

Αν T το μέσο του MH και P το μέσο του BN, το τετράπλευρο $MTNP$ είναι παραλληλόγραμμο και επομένως η TP διέρχεται από το μέσον του MN που είναι και μέσον του BH. Άρα οι ευθείες MN, BH, TP διέρχονται από το ίδιο σημείο.