



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Α΄ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΚΑΤΩ ΤΩΝ 15 1/2 ΕΤΩΝ

«Ευκλείδης»

Ημερομηνία: 24/01/2015

Ωρα εξέτασης: 10:00-14:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα **αιτιολογώντας** πλήρως τις απαντήσεις σας.
 2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
 3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού .
 4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.
-

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε όλα τα ζευγάρια των θετικών ακεραίων (x, y) που ικανοποιούν την εξίσωση

$$1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{y}{x} + \frac{5}{xy}$$

Προτεινόμενη λύση

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα: $xy + 3y + 2x = y^2 + 5$ ή $x(y + 2) = y^2 - 3y + 5$, απ' όπου $x = \frac{y^2 - 3y + 5}{y + 2} = y - 5 + \frac{15}{y + 2}$ (*).

Αφού τα x, y είναι θετικοί ακέραιοι, πρέπει $(y + 2)/15$, που σημαίνει πως $(y + 2) \in \{1, 3, 5, 15\}$ ή $y \in \{1, 3, 13\}$ και συνεπώς λόγω της (*) προκύπτει ότι:

$$(x, y) \in \{(1, 1), (1, 3), (9, 13)\}$$

Πρόβλημα 2

Να βρείτε όλους τους ακεραίους n έτσι ώστε ο αριθμός $\sqrt{\frac{4n-2}{n+5}}$ να είναι ρητός αριθμός.

Προτεινόμενη λύση

Πρώτα απ' όλα πρέπει $\frac{4n-2}{n+5} \geq 0 \Leftrightarrow n \in \mathbb{Z} - \{-5, -4, -3, -2, -1, 0\}$.

Τότε ο αριθμός $\sqrt{\frac{4n-2}{n+5}}$ είναι (θετικός) ρητός όταν υπάρχουν μη μηδενικοί ομόσημοι και σχετικά πρώτοι ακέραιοι α, β ώστε $\frac{4n-2}{n+5} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$, απ' όπου $n = \frac{5\alpha^2 + 2\beta^2}{4\beta^2 - \alpha^2} = -5 + \frac{22\beta^2}{4\beta^2 - \alpha^2} = -5 + \frac{22\beta^2}{(2\beta - \alpha)(2\beta + \alpha)}$ με $\alpha \neq 2\beta$.

Επειδή ο n είναι ακέραιος, πρέπει $(2\beta - \alpha)(2\beta + \alpha) / 22\beta^2$, απ' όπου $(2\beta - \alpha)(2\beta + \alpha) / 22$ (το $(2\beta - \alpha)(2\beta + \alpha) \nmid \beta^2$, διότι στην αντίθετη περίπτωση θα έπρεπε οι α, β να μην είναι σχετικά πρώτοι, άτοπο).

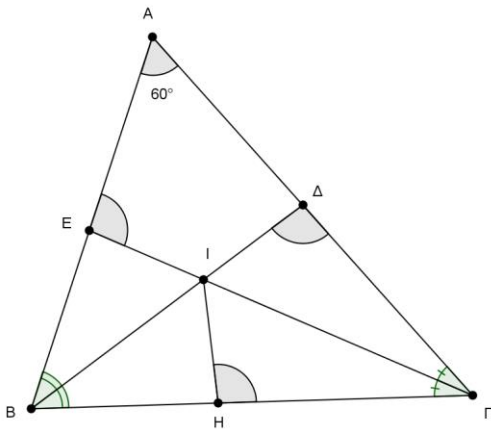
Από όλα τα πιο πάνω, συμπεραίνουμε πως το γινόμενο $(2\beta - \alpha)(2\beta + \alpha)$ παίρνει τις τιμές $\pm 1, \pm 2, \pm 11, \pm 22$ και από το γεγονός ότι οι παράγοντες $2\beta - \alpha, 2\beta + \alpha$ είναι επίσης σχετικά πρώτοι, εύκολα και με υπομονή καταλήγουμε στη μοναδική δεκτή περίπτωση $\alpha = 5, \beta = 3$ και έτσι $n = -5 + \frac{22 \cdot 3^2}{4 \cdot 3^2 - 5^2} = 13$.

Πρόβλημα 3

Σε τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με $\angle A = 60^\circ$. Φέρουμε τις διχοτόμους $B\Delta, \Gamma E$ των γωνιών $\angle B, \angle \Gamma$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

- i. $\angle B\Delta\Gamma = \angle A\epsilon\Gamma$
- ii. $B\Gamma = BE + \Gamma\Delta$

Προτεινόμενη λύση



- i. Από το τρίγωνο $AB\Delta$: $\angle B\Delta\Gamma = 60^\circ + \frac{B}{2}$
Από το τρίγωνο $B\Gamma E$: $\angle A\epsilon\Gamma = B + \frac{\Gamma}{2} = \frac{B}{2} + \frac{B}{2} + \frac{\Gamma}{2}$
 $= \frac{B}{2} + 90^\circ - \frac{A}{2}$
 $= \frac{B}{2} + 60^\circ$.

Άρα $\angle B\Delta\Gamma = \angle A\epsilon\Gamma$

- ii. Στο τρίγωνο $B\Delta\Gamma$: $\angle B\Delta\Gamma = 60^\circ + \frac{B}{2} > \frac{B}{2} = \angle \Delta B\Gamma$.
Άρα $\Gamma B > \Gamma\Delta$. Μπορούμε λοιπόν να πάρουμε στην πλευρά ΓB σημείο H , ώστε $\Gamma H = \Gamma\Delta$.
Απομένει τότε να αποδείξουμε πως $BH = BE$:

Αν I είναι το έγκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$, τα τρίγωνα $I\Gamma\Delta, I\Gamma H$ είναι ίσα, αφού $\Gamma I = \Gamma I, \Gamma\Delta = \Gamma H$ και $\angle \Delta\Gamma I = \angle I\Gamma H = \frac{\Gamma}{2}$.

Άρα $\angle \Gamma H I = \angle \Gamma\Delta I = \angle A\epsilon\Gamma \Rightarrow \angle H I B + \frac{B}{2} = \angle E I B + \frac{B}{2} \Rightarrow \angle H I B = \angle E I B$.

Τέλος, από τα ίσα τρίγωνα $B H I, B E I$ ($B I = B I, \angle H B I = \angle E B I = \frac{B}{2}, \angle H I B = \angle E I B$) προκύπτει ότι $B H = B E$, οπότε $B\Gamma = B H + H\Gamma = B E + \Gamma\Delta$.

Πρόβλημα 4

Γράφουμε κ ($\kappa \geq 5$) πραγματικούς αριθμούς σε μια γραμμή και υποθέτουμε ότι ισχύουν τα παρακάτω:

- (α) το άθροισμα οποιωνδήποτε τριών διαδοχικών αριθμών από αυτούς είναι θετικό,
- (β) το άθροισμα οποιωνδήποτε πέντε διαδοχικών αριθμών από αυτούς είναι αρνητικό.

Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του κ , για την οποία αυτό είναι δυνατόν να ισχύει.

Προτεινόμενη λύση

Για $\kappa = 5$ αριθμούς ισχύει. Π.χ. οι 5 αριθμοί $4, -7, 4, 4, -7$ ικανοποιούν τα (α) και (β).

Για $\kappa = 6$ αριθμούς ισχύει. Π.χ. οι 6 αριθμοί $4, -7, 4, 4, -7, 4$ ικανοποιούν τα (α) και (β).

Ας υποθέσουμε τώρα ότι υπάρχουν $\kappa \geq 7$ πραγματικοί αριθμοί που ικανοποιούν τις συνθήκες (α), (β) και επιλέγουμε οποιουσδήποτε 5 διαδοχικούς από αυτούς a, b, c, d, e .

Σύμφωνα με το (α) έχουμε $a + b + c > 0$, $c + d + e > 0$ απ' όπου $(a + b + c + d + e) + c > 0$ και επειδή από το (β) είναι $a + b + c + d + e < 0$, έχουμε πως $c > 0$. Συνεπώς για κάθε 5 διαδοχικούς αριθμούς, ο μεσαίος είναι θετικός και από αυτή την παρατήρηση, όλοι οι αριθμοί εκτός των δυο πρώτων και των δυο τελευταίων είναι θετικοί.

Ας θεωρήσουμε τώρα 6 διαδοχικούς a, b, c, d, e, f . Και πάλι από τις συνθήκες του προβλήματος, $a + b + c + d + e < 0$ και $(a + b + c) + (d + e + f) > 0$. Άρα $f > 0$ και με ανάλογο τρόπο καταλήγουμε πως $a > 0$ και τελικά όλοι οι αριθμοί θα είναι θετικοί, κάτι που αποτελεί αντίφαση με τις συνθήκες (α) και (β) του προβλήματος. Συνεπώς, $\kappa_{\text{μεγ.}} = 6$.