ΘΕΜΑ: GI_V_ALG_4_22764

Έστω $P(x)$ πολυώνυμο τρίτου βαθμού το οποίο διαιρείται με το πολυώνυμο x^2+2x και είναι τέτοιο, ώστε $P(1)=0$ και $P(2)=8$.

α. Να αποδείξετε ότι $P(x)=x^3+x^2-2x$.

(Μονάδες 10)

β. Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=8$.

(Μονάδες 6)

γ. Να λύσετε την ανίσωση $P(x)>2$.

(Μονάδες 9)

Στόχοι: Πολυωνυμική εξίσωση, Πράξεις πολυωνύμων, Ανισώσεις

Γνωστικές απαιτήσεις: (4.1), (4.2), (4.3), (4.4), (4.5)

ΛΥΣΗ:

α. Αφού το $P(x)$ είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού, θα έχει τη μορφή $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$, με $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$.

Επίσης ο διαιρέτης x^2+2x του $P(x)$ μπορεί και να γραφεί παραγοντοποιημένος ως $x(x+2)$.

Αφού λοιπόν το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρείται ακριβώς από το $x(x+2)$, το x είναι παράγοντάς του, βγάζουμε το συμπέρασμα ότι το 0 είναι ρίζα του πολυωνύμου.

Αφού είναι ρίζα το 0, τότε θα πρέπει: $\boxed{\delta=0}$, με το πολυώνυμο να γράφεται πλέον στη μορφή: $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x$.

Επίσης, παράγοντας είναι το $(x+2)$, άρα και το -2 είναι ρίζα του $P(x)$ οπότε:

$P(-2)=0\Leftrightarrow\alpha(-2)^3+\beta(-2)^2+\gamma(-2)=0\Leftrightarrow-8\alpha+4\beta-2\gamma=0\Leftrightarrow$

$\boxed{-4\alpha+2\beta-\gamma=0}(1)$

Ακόμα, από τα υπόλοιπα δεδομένα έχουμε:

$P(1)=0\Leftrightarrow\alpha1^3+\beta1^2+\gamma1=0\Leftrightarrow$

$\boxed{\alpha+\beta+\gamma=0}(2)$

και

$P(2)=8\Leftrightarrow\alpha2^3+\beta2^2+\gamma2=8\Leftrightarrow8\alpha+4\beta+2\gamma=8\Leftrightarrow$

$\boxed{4\alpha+2\beta+\gamma=4}(3)$

Άρα από τις (1), (2) και (3) δημιουργούμε και λύνουμε το σύστημα 3×3:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ -4\alpha+2\beta-\gamma=0\\(2)\ \ \alpha+\beta+\gamma=0\\(3)\ 4\alpha+2\beta+\gamma=4\end{array}\right\}\overset{(1)+(3)}{\Leftrightarrow}\left.\begin{array}{c}4\beta=4\\\alpha+\beta+\gamma=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{c}\boxed{\beta=1}\\\alpha+\beta+\gamma=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\alpha+1+\gamma=0\Leftrightarrow\alpha+\gamma=-1$$

$$\left.\begin{array}{c}\alpha+\gamma=-1\\4\alpha+2\cdot1+\gamma=4\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{c}\alpha=-\gamma-1\\4\alpha+\gamma=4-2\end{array}\right\}\Leftrightarrow4(-\gamma-1)+\gamma=2\Leftrightarrow-4\gamma-4+\gamma=2\Leftrightarrow-3\gamma=6\Leftrightarrow$$

$\boxed{\gamma=-2}$

Και $\alpha=-(-2)-1\Leftrightarrow\boxed{\alpha=1}$

Άρα $P(x)=x^3+x^2-2x$

β. Το πολυώνυμό μας γίνεται:

$P(x)=8 \Leftrightarrow x^3+x^2-2x=8 \Leftrightarrow x^3+x^2-2x-8=0$, το οποίο θα λύσουμε με την βοήθεια του σχήματος Horner, για $\rho=2$ (τονίζουμε πως μπορεί να λυθεί και με παραγοντοποίηση).

1	1	-2	-8	$\rho=2$
	2	6	8	
1	3	4	0	

Άρα $x^3+x^2-2x-8=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+3x+4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ x^2+3x+4=0 \end{cases}$

με $x=2$ και $x^2+3x+4=0$, όπου η εξίσωση 2ου βαθμού, με $\Delta=9-16=-7$, είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.
Οπότε μοναδική πραγματική ρίζα είναι το $x=2$.

γ. Η ανίσωσή μας γίνεται: $x^3+x^2-2x>2 \Leftrightarrow x^3+x^2-2x-2>0$, η οποία λύνεται πιο εύκολα με παραγοντοποίηση (τονίζουμε πως μπορεί να λυθεί και με σχήμα Horner).

Άρα $x^3+x^2-2x-2>0 \Leftrightarrow x^2(x+1)-2(x+1)>0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-2)>0$

$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ και

$x^2-2=0 \Leftrightarrow x=2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$

Άρα κατασκευάζοντας τον πίνακα έχουμε:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	-1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$x+1$	-	-	0 +	+	+
x^2-2	+	0 -	-	0	+
$P(x)$	-	+	-	+	

Άρα αφού θέλουμε $P(x)>0$, τότε $x \in (-\sqrt{2},-1) \cup (\sqrt{2},+\infty)$