

Ολοκληρωτικές εξισώσεις: τριτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση

Κυριαζής Χρήστος

M.Sc. Μαθηματικός

5ο ΓΕΛ Αχαρνών

E-mail address: chriskyriazis@gmail.com

Πρωτοπαπάς Ελευθέριος

Ph.D., M.Sc. Μαθηματικός

7ο ΓΕΛ Περιστερίου

E-mail address: lprotopapas@hotmail.com

Περίληψη

Οι ολοκληρωτικές εξισώσεις εμφανίζονται στη μαθηματική μοντελοποίηση σημαντικών προβλημάτων στη φυσική και στη ιατρική, όπως η διάδοση και η σκέδαση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων και η διάδοση ακουστικών και ελαστικών κυμάτων. Επίσης, έχουν θεμελιώδη ρόλο στην ανάπτυξη της συναρτησιακής ανάλυσης και παρέχουν το θεωρητικό πλαίσιο για τη μαθηματική έρευνα. Μια μεγάλη κλάση προβλημάτων αρχικών και συνοριακών τιμών που εμπλέκουν διαφορικές εξισώσεις (συνήθεις ή μερικές) μπορούν να μετασχηματιστούν σε ολοκληρωτικές, οπότε μια ακριβής ή μια προσεγγιστική λύση μπορεί να βρεθεί πιο εύκολα. Αρκετά συχνά ολοκληρωτικές εξισώσεις έχουν τεθεί ως θέμα στις εξετάσεις για την εισαγωγή στα ελληνικά πανεπιστήμια.

Abstract

Integral equations arise in mathematical modeling of important problems in physical sciences, engineering and medicine, such as propagation and scattering of electromagnetic waves and propagation of acoustical and elastic waves. They also play a fundamental role in the development of the functional analysis and provide a theoretical framework for mathematical research. A large class of initial and boundary problems involving differential equations (ordinary or partial) can be translated to integral equations and thus an exact or an approximate solution can be often obtained easier. Quite often, integral equations can serve as exam questions of the entry procedure to the Greek Universities.

Εισαγωγή

Ολοκληρωτική εξίσωση (Σιαφαρίκας 2003, Logan 2005, Δάσιος 2001, Ντούγιας 2010) ονομάζεται κάθε εξίσωση που περιέχει την άγνωστη συνάρτηση μέσα στο ολοκλήρωμα, όπως η

$$y(t) = 1 + \int_0^t y(s) ds. \quad (1)$$

Η θεωρία των ολοκληρωτικών εξισώσεων αποτελεί σημαντικό κομμάτι της Μαθηματικής Ανάλυσης, λόγω των εφαρμογών της σε προβλήματα συνοριακών τιμών στις διαφορικές εξισώσεις. Εφαρμογές της εμφανίζονται (Σιαφαρίκας 2003) στην ιατρική, στη διάδοση μάζας και θερμότητας, στη θεωρία παιγνίων, στη θεωρία ελέγχου, στην οικονομία, στη θεωρία δυναμικού, στην ηλεκτροδυναμική, στην ακουστική κ.τ.λ.

Πολλά από τα προβλήματα που εμφανίζονται στη Φυσική μπορούν να προτυποποιηθούν με δύο διαφορετικούς ισοδύναμους τρόπους άμεσα συνδεδεμένους μεταξύ τους, τις διαφορικές και τις ολοκληρωτικές εξισώσεις. Αυτό δεν σημαίνει ότι οι δύο τρόποι έκφρασης έχουν παρόμοιες ιδιότητες. Συγκεκριμένα, οι διαφορικές εξισώσεις περιγράφονται με μη φραγμένους τελεστές, ενώ οι ολοκληρωτικές εξισώσεις με φραγμένους τελεστές (Δάσιος 2001). Επίσης, οι διαφορικές εξισώσεις δίνουν ένα σημειακό χαρακτηρισμό των λύσεων, ενώ οι ολοκληρωτικές εξισώσεις χαρακτηρίζουν ολικά τις λύσεις. Επιπλέον, ένα σημαντικό πλεονέκτημα των ολοκληρωτικών εξισώσεων έναντι των διαφορικών εξισώσεων είναι ότι αυτές περιέχουν τις αρχικές ή τις συνοριακές συνθήκες (Δάσιος 2001).

Σημειώνουμε πως υπάρχουν προβλήματα τα οποία οδηγούν άμεσα σε ολοκληρωτικές εξισώσεις, αλλά δε μπορούν να εκφραστούν με τη βοήθεια των διαφορικών εξισώσεων (Ντούγιας 2010).

Οι ολοκληρωτικές εξισώσεις χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες (Σιαφαρίκας 2003, Logan 2005, Δάσιος 2001, Ντούγιας 2010), στις εξισώσεις Fredholm, όπου τα άκρα ολοκλήρωσης είναι σταθερά και στις εξισώσεις τύπου Volterra, όπου ένα από τα άκρα ολοκλήρωσης είναι μεταβλητό, προς τιμήν του Σουηδού μαθηματικού I. Fredholm και του Ιταλού μαθηματικού V. Volterra, αντίστοιχα, οι οποίοι πρώτοι τις μελέτησαν συστηματικά. Στη συνέχεια ορίζουμε μερικές ολοκληρωτικές εξισώσεις τύπου Volterra ή Fredholm.

Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις u, f στο $[\alpha, \beta]$ και η συνάρτηση K , που ονομάζεται **ολοκληρωτικός πυρήνας**, με:

$$K: [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2)$$

Ορίζουμε ως **ολοκληρωτική εξίσωση τύπου Volterra πρώτου είδους** την εξίσωση με μορφή:

$$\int_{\alpha}^x K(x, t)u(t)dt = f(x), \quad x \in [\alpha, \beta], \quad (3)$$

ως **ολοκληρωτική εξίσωση τύπου Volterra δευτέρου είδους** την εξίσωση με μορφή:

$$u(x) = \int_{\alpha}^x K(x, t)u(t)dt + f(x), \quad x \in [\alpha, \beta], \quad (4)$$

ως **ολοκληρωτική εξίσωση τύπου Fredholm πρώτου είδους** την εξίσωση με μορφή:

$$\int_{\alpha}^{\beta} K(x, t)u(t)dt = f(x), \quad x \in [\alpha, \beta], \quad (5)$$

ως **ολοκληρωτική εξίσωση τύπου Fredholm δευτέρου είδους** την εξίσωση με μορφή:

$$u(x) = \int_{\alpha}^{\beta} K(x, t)u(t)dt + f(x), \quad x \in [\alpha, \beta], \quad (6)$$

ως **ολοκληρωτική εξίσωση τύπου Fredholm δευτέρου είδους με παράμετρο** την εξίσωση με μορφή:

$$u(x) = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} K(x, t)u(t)dt + f(x), \quad x \in [\alpha, \beta], \lambda \in \mathbb{R}, \quad (7)$$

και ως **ολοκληρωτική εξίσωση τύπου Fredholm τρίτου είδους** την εξίσωση με μορφή:

$$g(x)u(x) = \int_{\alpha}^{\beta} K(x, t)u(t)dt + f(x), \quad x \in [\alpha, \beta], \lambda \in \mathbb{R}.. \quad (8)$$

Είναι εύκολο κάποιος να διακρίνει ότι οι εξισώσεις (3) και (5) είναι πρώτου είδους, επειδή η άγνωστη συνάρτηση u εμφανίζεται μόνο στο ολοκλήρωμα, ενώ οι (4) και (6) είναι δευτέρου είδους, αφού η άγνωστη συνάρτηση u βρίσκεται και εκτός του ολοκληρώματος. Σε κάθε μία από τις εξισώσεις (3) ως (8) αν η συνάρτηση f μηδενίζεται ταυτοτικά, τότε οι αντίστοιχες εξισώσεις τύπου Volterra ή Fredholm λέγονται ομογενείς.

Οι κυριότερες μέθοδοι για την επίλυση ολοκληρωτικών εξισώσεων (Σιαφαρίκας 2003, Ντούγιας 2010) είναι:

- η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων για ομαλές μη γραμμικές και γραμμικές ολοκληρωτικές εξισώσεις,
- η μέθοδος των επαναληπτικών πυρήνων για ομαλές γραμμικές ολοκληρωτικές εξισώσεις,
- η μέθοδος Fredholm για ομαλές γραμμικές ολοκληρωτικές εξισώσεις,

- η μέθοδος Hilbert-Schmidt για γραμμικές ολοκληρωτικές εξισώσεις με συμμετρικό πυρήνα,
- η μέθοδος των ολοκληρωτικών μετασχηματισμών και
- η μετατροπή της ολοκληρωτικής εξίσωσης σε ισοδύναμο πρόβλημα αρχικών ή συνοριακών τιμών και η επίλυσή του.

Οι μαθητές δεν συναντούν για πρώτη φορά ολοκληρωτικές εξισώσεις στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Στην θετική και στην τεχνολογική κατεύθυνση της Γ΄ Λυκείου υπάρχει πληθώρα ασκήσεων με ολοκληρωτικές εξισώσεις (οι οποίες δεν χαρακτηρίζονται έτσι) σε βοηθήματα και στο διαδίκτυο, όταν στο σχολικό βιβλίο δεν υπάρχει ούτε μια ολοκληρωτική εξίσωση. Αξιοσημείωτο είναι ότι ολοκληρωτικές εξισώσεις έχουν τεθεί ως θέματα και στις πανελλήνιες εξετάσεις, με ιδιαίτερα δημοφιλές θέμα τις εξισώσεις τύπου Volterra. Οι μαθητές μαθαίνουν να αναγνωρίζουν μοντέλα μέσα στις δοσμένες εξισώσεις, ώστε να εφαρμόσουν οικείες τεχνικές επίλυσης. Η πιο συχνά εμφανιζόμενη τεχνική είναι να μετατρέπουν τη δοσμένη ολοκληρωτική εξίσωση σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα αρχικών ή συνοριακών τιμών, δεδομένου του γεγονότος ότι οι μαθητές έχουν διδαχθεί τρόπους επίλυσης διαφορικών εξισώσεων.

Ολοκληρωτικές εξισώσεις και πανελλαδικές εξετάσεις

Στο 4ο θέμα στις εξετάσεις του 2001 έπρεπε να λυθεί η εξίσωση:

$$f(x) = 1 - 2x^2 \int_0^1 t f^2(xt) dt, \quad (9)$$

η οποία ισοδύναμα μετασχηματίζεται στην:

$$f(x) = 1 - 2 \int_0^x u f^2(u) du, \quad (10)$$

που είναι ολοκληρωτική εξίσωση τύπου Volterra δεύτερου είδους. Ένας μαθητής της Γ΄ Λυκείου παραγωγίζει τη σχέση (10), οπότε καταλήγει στην ισοδύναμη διαφορική εξίσωση:

$$f'(x) = -2xf^2(x), \text{ με } f(0) = 1. \quad (11)$$

Η λύση της εξίσωσης (11) είναι:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}. \quad (12)$$

Στο 4ο θέμα στις εξετάσεις του 2008 τέθηκε η ολοκληρωτική εξίσωση:

$$f(x) = (10x^3 + 3x) \int_0^2 f(t) dt - 45, \quad (13)$$

που είναι ολοκληρωτική εξίσωση τύπου Fredholm δεύτερου είδους. Η συγκεκριμένη ανήκει και σε μια ειδική κατηγορία και ονομάζεται εξίσωση

Hammerstein. Ο τρόπος αντιμετώπισης μιας εξίσωσης Hammerstein είναι ο ίδιος στην δευτεροβάθμια και την τριτοβάθμια εκπαίδευση. Από τη στιγμή που το ολοκλήρωμα έχει σταθερά άκρα και εξαρτάται από μια μεταβλητή, θέτουμε:

$$c = \int_0^2 f(t)dt, \quad (14)$$

οπότε η (13) γίνεται:

$$f(x) = 10cx^3 + 3cx - 45, \quad (15)$$

και αντικαθιστώντας την (15) στην (14) προκύπτει ότι:

$$c = 2, \quad (16)$$

άρα η λύση της (13) είναι:

$$f(x) = 20x^3 + 6x - 45. \quad (17)$$

Οι παραπάνω ολοκληρωτικές εξισώσεις είναι γραμμικές. Στις εξετάσεις έχουν τεθεί και μη γραμμικές ολοκληρωτικές εξισώσεις. Θα αναφέρουμε ότι στο Δ θέμα στις εξετάσεις του 2010 δινόταν η ολοκληρωτική εξίσωση Volterra με:

$$f(x) = x + 3 + \int_0^x \frac{t}{f(t) - t} dt, \quad (18)$$

στο Δ θέμα στις εξετάσεις του 2011 δινόταν το σύστημα των ολοκληρωτικών εξισώσεων Volterra με:

$$\begin{cases} \frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)} dt \\ \frac{1-g(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{f(x+t)} dt \end{cases}, \quad (19)$$

ενώ στο Δ θέμα στις εξετάσεις του 2012 δινόταν η ολοκληρωτική εξίσωση Volterra με:

$$\ln x - x = - \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e \right) |f(x)|. \quad (20)$$

Μετατροπές ολοκληρωτικών και διαφορικών εξισώσεων

Για την αναδιατύπωση διαφορικών εξισώσεων ως ολοκληρωτικών, η συνήθης διαδικασία είναι η επαναλαμβανόμενη ολοκλήρωση της εξίσωσης μέχρι της εξαφάνισης παραγώγων. Με το ακόλουθο λήμμα (Logan 2005, Ντούγιας 2010) μπορούμε να δουλέψουμε για εξισώσεις δεύτερης τάξης.

Λήμμα

Για κάθε συνεχή συνάρτηση f με $x \geq a$, ισχύει:

$$\int_a^x \int_a^s f(y) dy ds = \int_a^x f(y) (x-y) dy. \quad (21)$$

Η απόδειξη του παραπάνω λήμματος γίνεται εύκολα με παραγοντική ολοκλήρωση.

Η γενίκευσή του για εξισώσεις νιοστής τάξης (Ντούγιας 2010) είναι:

$$\int_a^t \int_a^{t_1} \int_a^{t_2} \dots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n dt_{n-1} \dots dt_2 dt_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-t_1)^{n-1} f(t_1) dt_1. \quad (22)$$

Στο ακόλουθο παράδειγμα δείχνουμε πως μετατρέπεται σε ολοκληρωτική εξίσωση ένα πρόβλημα αρχικών τιμών δεύτερης τάξης (Logan 2005).

Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών δεύτερης τάξης:

$$\begin{cases} u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x), \text{ για } x > a \\ u(a) = u_0 \\ u'(a) = u_1 \end{cases}. \quad (23)$$

Επιλύοντας τη διαφορική εξίσωση ως προς τη δεύτερη παράγωγο και ολοκληρώνοντας από το a έως το x , λαμβάνουμε:

$$u'(x) - u_1 = p(a)u_0 - p(x)u(x) - \int_a^x [(q(y) - p'(y))u(y) - f(y)] dy. \quad (24)$$

Ολοκληρώνοντας ξανά από το a έως το x και με χρήση της (21), προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} u(x) = & - \int_a^x \{ p(y) + (x-y)[q(y) - p'(y)] \} u(y) dy \\ & + \int_a^x (x-y)f(y) dy + (p(a)u_0 + u_1)(x-a) + u_0. \end{aligned} \quad (25)$$

Η εξίσωση αυτή είναι Volterra δεύτερου είδους, όπως η εξίσωση (4).

Για τον μετασχηματισμό μιας ολοκληρωτικής εξίσωσης η πορεία είναι διαφορετική (Collins 2006, Corduneanu 2008). Για παράδειγμα, αν στην εξίσωση:

$$y(t) = 1 + \int_0^t y(s) ds, \quad (26)$$

θέσουμε:

$$w(t) = \int_0^t y(s) ds, \quad (27)$$

προκύπτει η ισοδύναμή της:

$$w'(t) = 1 + w(t), \text{ με } w'(0) = 1. \quad (28)$$

Αξίζει εδώ να αναφερθεί ότι μια διαφορική εξίσωση μπορεί να γραφεί σε κάποιες περιπτώσεις ως ολοκληρωδιαφορική εξίσωση (Collins 2006, Corduneanu 2008). Η εξίσωση του προβλήματος (23) μπορεί να γραφεί:

$$w'(x) + p(x)w(x) + q(x) \int_a^x w(s)ds = f(x), \text{ για } x > a, \quad (29)$$

αν θέσουμε:

$$u(x) = \int_a^x w(s)ds. \quad (30)$$

Επίλυση ολοκληρωτικών εξισώσεων με διαδικασίες που διδάσκονται στην τριτοβάθμια εκπαίδευση

Στη συγκεκριμένη ενότητα θα επιλύσουμε τρεις ολοκληρωτικές εξισώσεις με κάποιους από τους έξι τρόπους που αναφέραμε στην εισαγωγή. Οι εξισώσεις αυτές λύνονται και με γνώσεις Λυκείου. Ο στόχος μας είναι να αναδείξουμε σε κάθε περίπτωση την αντίστοιχη μέθοδο.

Αρχικά, θα λύσουμε με διαδοχικές προσεγγίσεις την ολοκληρωτική εξίσωση Volterra 2ου είδους:

$$f(x) = 1 + \int_0^x (t-x)f(t)dt. \quad (31)$$

Θέτουμε:

$$Af(x) = 1 + \int_0^x (t-x)f(t)dt \quad (32)$$

και επιλέγουμε:

$$f_0(x) = 1. \quad (33)$$

Τότε έχουμε ότι:

$$Af_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2}, \quad (34)$$

$$A^2f_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}, \quad (35)$$

οπότε με μαθηματική επαγωγή αποδεικνύεται ότι:

$$A^n f_0(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}. \quad (36)$$

Επομένως η λύση της εξίσωσης (31) είναι:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{A^n f_0(x)\} = \cos x. \quad (37)$$

Επίσης, με ύλη Λυκείου η εξίσωση (31) ισοδύναμα γράφεται:

$$f(x) = 1 + \int_0^x t f(t) dt - x \int_0^x f(t) dt, \quad (38)$$

η οποία παραγωγίζεται δύο φορές και δίνει το ισοδύναμο πρόβλημα

$$f''(x) = -f(x), \text{ με } f(0) = 1, f'(0) = 0. \quad (39)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση g στο $\mathbb{R}$ με:

$$g(x) = (f(x) - \cos x)^2 + (f'(x) + \sin x)^2, \quad (40)$$

η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$g'(x) = 2(f'(x) + \sin x)(f(x) - \cos x + f''(x) + \sin x), \quad (41)$$

όπου λόγω της εξίσωσης της (39) γίνεται:

$$g'(x) = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \quad (42)$$

οπότε η g είναι σταθερή, άρα ισχύει:

$$g(x) = c, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \quad (43)$$

ή

$$(f(x) - \cos x)^2 + (f'(x) + \sin x)^2 = c, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \quad (44)$$

Θέτουμε στην (44) όπου $x = 0$ και λόγω της (38) προκύπτει:

$$c = 0. \quad (45)$$

Συνεπώς, λόγω της (44) βρίσκουμε ότι:

$$f(x) = \cos x, \quad (46)$$

όπως βρήκαμε και στην (37).

Έστω, επίσης, η ολοκληρωτική εξίσωση:

$$u(x) = x + \int_0^{1/2} u(t) dt, \quad (47)$$

η οποία είναι εξίσωση Fredholm 2ου είδους με παράμετρο και θα τη λύσουμε με τη βοήθεια των επαναληπτικών πυρήνων.

Θεωρούμε:

$$K_1(x, t) = 1, \quad (48)$$

οπότε:

$$K_2(x, t) = \frac{1}{2}, K_3(x, t) = \frac{1}{4} \quad (49)$$

και με επαγωγή αποδεικνύεται ότι:

$$K_n(x, t) = \frac{1}{2^{n-1}}, n \in \mathbb{N}^*. \quad (50)$$

Τότε, ο Fredholm επιλύων πυρήνας του πυρήνα $K(x, t)$ είναι:

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \cdot K_{i+1}(x, t) = 2. \quad (51)$$

Τότε, η εξίσωση (47) έχει μοναδική λύση την:

$$u(x) = x + 1 \cdot \int_0^{1/2} 2t dt = x + \frac{1}{4}. \quad (52)$$

Επιπλέον με γνώσεις Λυκείου, η ολοκληρωτική εξίσωση (47) γράφεται:

$$u(x) = x + c, \quad (53)$$

με:

$$c = \int_0^{1/2} u(t) dt. \quad (54)$$

Αντικαθιστώντας την (52) στην (53) βρίσκουμε ότι:

$$c = \frac{1}{4}, \quad (55)$$

οπότε προκύπτει η ίδια λύση που βρήκαμε στην (52).

Τέλος, έστω η ολοκληρωτική εξίσωση Volterra δευτέρου είδους

$$f(x) = x - \int_0^x (x-t)f(t) dt. \quad (56)$$

Παίρνουμε τον μετασχηματισμό Laplace της εξίσωσης (56), οπότε λόγω της γραμμικότητας του τελεστή έχουμε ότι:

$$L\{f(x)\} = L(x) - L\left\{\int_0^x (x-t)f(t) dt\right\} \quad (57)$$

ή

$$F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} F(s) \quad (58)$$

ή

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 1}, \quad (59)$$

όπου αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό προκύπτει η συνάρτηση f:

$$f(x) = L^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + 1}\right) = \sin x. \quad (60)$$

Για να επιλύσουμε την (56) με γνώσεις δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, την μετασχηματίζουμε ισοδύναμα στην:

$$f(x) = 1 + \int_0^x tf(t) dt - x \int_0^x f(t) dt, \quad (61)$$

η οποία παραγωγίζεται δύο φορές και δίνει το ισοδύναμο πρόβλημα:

$$f''(x) = -f(x), \text{ με } f(0) = 0, f'(0) = 1. \quad (62)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση g στο $\mathbb{R}$ με:

$$g(x) = (f(x) - \sin x)^2 + (f'(x) - \cos x)^2, \quad (63)$$

η οποία αποδεικνύεται ότι είναι μηδενική ακολουθώντας την διαδικασία που περιγράψαμε παραπάνω από την (41) μέχρι την (45), οπότε:

$$f(x) = \sin x. \quad (64)$$

Συμπεράσματα

Οι ολοκληρωτικές εξισώσεις αποτελούν ένα σημαντικότατο τομέα της Μαθηματικής Ανάλυσης, με μεγάλο φάσμα εφαρμογών και σε άλλες θετικές επιστήμες για τη μελέτη προβλημάτων και φαινομένων. Η ευρύτητα μεθόδων και η ευκολία (τις περισσότερες φορές) στη μετάβαση σε διαφορικές εξισώσεις και αντιστρόφως, τις καθιστά σημαντικές για τη μαθηματική επιστήμη. Η σημαντικότητα τους τονίζεται μάλιστα και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση αφού αποτελούν, αρκετές φορές κιόλας, περιεχόμενο θεμάτων πανελλαδικών εξετάσεων, όπου έμμεσα ζητούνται από τους μαθητές προβλήματα που τις χρησιμοποιούν.

Ενδεικτική βιβλιογραφία

1. Σιαφαρίκας, Π. (2003). *Ολοκληρωτικές εξισώσεις*. Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών.
2. Logan, J. D. (2005). *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*. Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.
3. Δάσιος, Γ. (2001). *Δέκα διαλέξεις Εφαρμοσμένων Μαθηματικών*. Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.
4. Ντούγιας, Κ. Σ. (2010). *Ολοκληρωτικές εξισώσεις*. Εκδόσεις Συμμετρία..
5. Collins, J. P. (2006). *Differential and Integral Equations*. Oxford University Press.
6. Corduneanu, C. (2008). *Integral equations and applications*. Cambridge University Press.